Megoldás. A Fibonacci-számok sorozatát az $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ $(n \geq 3)$ rekurzióval definiáljuk. Először n szerinti teljes indukcióval igazoljuk az

$$F_n^2 + F_{n-1}^2 + \cdots + F_2^2 + F_1^2 = F_n F_{n+1}$$

összefüggést. Az egyenlőség $n = 1$ esetén teljesül, hiszen $1^2 = 1 \cdot 1$, ha pedig valamely n-re teljesül az állítás, akkor

$$\begin{aligned} F_{n+1}^2 + F_n^2 + F_{n-1}^2 + \cdots + F_2^2 + F_1^2 &= F_{n+1}^2 + F_n F_{n+1} = F_{n+1}(F_n + F_{n+1}) = \\ &= F_{n+1} F_{n+2} \end{aligned}$$

alapján $n + 1$ esetén is fennáll.

Tegyük fel indirekten, hogy egy téglalapot felbontottunk különböző méretű négyzetekre úgy, hogy minden négyzet oldalhossza Fibonacci-szám. A két legnagyobb négyzet oldalának hossza legyen F_m és F_n, ahol $m < n$. Ekkor a téglalap T területére

$$T \geq (F_m + F_n) F_n,$$

mert mindkét oldalának hossza legalább F_n, a hosszabb oldalé pedig legalább $F_m + F_n$. Másrészt viszont, mivel a téglalapot fedő négyzetek között nincsenek azonos oldalhosszúságúak, ezért a fenti azonosságot felhasználva a területre a

$$T \leq F_2^2 + F_3^2 + \cdots + F_m^2 + F_n^2 < F_m F_{m+1} + F_n^2$$

felső becslést kapjuk. A területre vonatkozó alsó és felső becslést összevetve

$$(F_m + F_n) F_n = F_m F_n + F_n^2 < F_m F_{m+1} + F_n^2$$

adódik, amely az $n > m$ feltételnek ellentmondó $F_n < F_{m+1}$ egyenlőtlenséggel ekvivalens. Ebből az ellentmondásból következik, hogy nem lehet minden négyzet oldalhossza Fibonacci-szám.