Megoldás. Legyen $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. A bizonyítandó egyenlőtlenségben n-nel osztva és gyököt vonva:

$$\sqrt{\frac{\left(\frac{a_1}{a_2+\ldots+a_n}\right)^2 + \left(\frac{a_2}{a_3+\ldots+a_1}\right)^2 + \ldots \left(\frac{a_n}{a_1+\ldots+a_{n-1}}\right)^2}{n}} \geq \frac{1}{n-1}.$$

Bal oldalon n db pozitív szám négyzetes közepe áll, ennél nem nagyobb ugyanezen számok számtani közepe:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\frac{\left(\frac{a_1}{a_2+\ldots+a_n}\right)^2 + \left(\frac{a_2}{a_3+\ldots+a_1}\right)^2 + \ldots \left(\frac{a_n}{a_1+\ldots+a_{n-1}}\right)^2}{n}} \geq \\
&\geq \frac{\left(\frac{a_1}{a_2+\ldots+a_n}\right) + \left(\frac{a_2}{a_3+\ldots+a_1}\right) + \ldots + \left(\frac{a_n}{a_1+\ldots+a_{n-1}}\right)}{n} = \\
&= \frac{\left(\frac{S-(a_2+\ldots+a_n)}{a_2+\ldots+a_n}\right) + \left(\frac{S-(a_3+\ldots+a_1)}{a_3+\ldots+a_1}\right) + \ldots + \left(\frac{S-(a_1+\ldots+a_{n-1})}{a_1+\ldots+a_{n-1}}\right)}{n} = \\
&= \frac{\left(\frac{S}{a_2+\ldots+a_n} - 1\right) + \left(\frac{S}{a_3+\ldots+a_1} - 1\right) + \ldots \left(\frac{S}{a_1+\ldots+a_{n-1}} - 1\right)}{n} = \\
&= \frac{S \cdot \left(\frac{1}{a_2+\ldots+a_n} + \frac{1}{a_3+\ldots+a_1} + \ldots + \frac{1}{a_1+\ldots+a_{n-1}}\right) - n}{n} = \\
&= S \cdot \frac{\frac{1}{a_2+\ldots+a_n} + \frac{1}{a_3+\ldots+a_1} + \ldots + \frac{1}{a_1+\ldots+a_{n-1}}}{n} - 1 = S \cdot A - 1,
\end{aligned}$$

ahol A jelöli a kapott emeletes törtet. A számtani és harmonikus közép közötti egyenlőtlenség alapján:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{A} &= \frac{n}{\frac{1}{a_2+\ldots+a_n} + \frac{1}{a_3+\ldots+a_1} + \ldots + \frac{1}{a_1+\ldots+a_{n-1}}} \leq \\
&\leq \frac{(a_2 + \ldots + a_n) + (a_3 + \ldots + a_1) + \ldots + (a_1 + \ldots + a_{n-1})}{n} = \frac{S \cdot (n-1)}{n}.
\end{aligned}$$

Tehát $A \geq \dfrac{n}{S \cdot (n-1)}$, amit visszahelyettesítve:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\frac{\left(\frac{a_1}{a_2+\ldots+a_n}\right)^2 + \left(\frac{a_2}{a_3+\ldots+a_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{a_n}{a_1+\ldots+a_{n-1}}\right)^2}{n}} \geq \\
&\geq S \cdot \frac{n}{S \cdot (n-1)} - 1 = \frac{n-(n-1)}{n-1} = \frac{1}{n-1}.
\end{aligned}$$

Ezzel az állítást beláttuk.