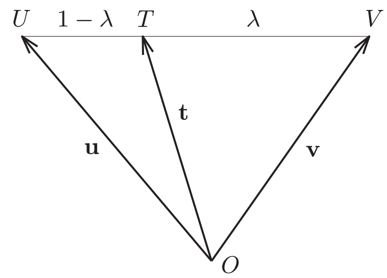
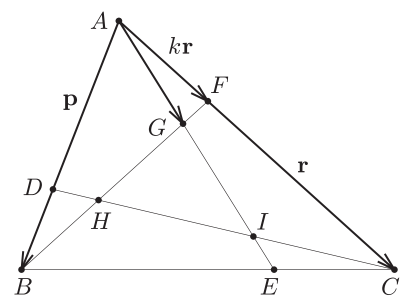
Megoldás. Ismert, hogy ha az UV szakasz végpontjainak helyvektora $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$, akkor a szakasz tetszőleges T pontjának helyvektora $\mathbf{t} = \lambda\mathbf{u} + (1-\lambda)\mathbf{v}$ alakban írható, ahol a $0 \le \lambda \le 1$ számra $\lambda \cdot UT = (1-\lambda) \cdot TV$ teljesül.



1. ábra



2. ábra

Legyen $AD : DB = BE : EC = CF : FA = (1-k) : k$, ekkor a feltétel szerint $k \ne \frac{1}{2}$. Ha bevezetjük az $\overrightarrow{AB} = \mathbf{p}$ és $\overrightarrow{AC} = \mathbf{r}$ jelöléseket, akkor $\overrightarrow{AE} = k\mathbf{p} + (1-k)\mathbf{r}$ és $\overrightarrow{AF} = k\mathbf{r}$ (*2. ábra*). Mivel a G pont rajta van az AE szakaszon, van olyan α szám, amelyre $\overrightarrow{AG} = \alpha\overrightarrow{AE} = \alpha\big(k\mathbf{p} + (1-k)\mathbf{r}\big)$. Másrészt G a BF szakasz belső pontja, tehát létezik olyan β szám, amelyre

$$\overrightarrow{AG} = \beta\overrightarrow{AB} + (1-\beta)\overrightarrow{AF} = \beta\mathbf{p} + (1-\beta)k\mathbf{r}.$$

Az $\overrightarrow{AG}$ kétféle felírását egyenlővé téve, majd rendezve kapjuk, hogy

$$\alpha\big(k\mathbf{p} + (1-k)\mathbf{r}\big) = \beta\mathbf{p} + (1-\beta)k\mathbf{r},$$
$$(\alpha k - \beta)\mathbf{p} = \big((1-\beta)k - \alpha(1-k)\big)\mathbf{r}.$$

Mivel $\mathbf{p}$ és $\mathbf{r}$ nem párhuzamos vektorok, ez csak akkor teljesülhet, ha mindkét oldalon 0 az együttható, azaz ha $\alpha k = \beta$ és $(1-\beta)k = \alpha(1-k)$. Ebből az egyenletrendszerből kapjuk, hogy $\alpha = \dfrac{k}{(k^2-k+1)}$. Vagyis

$$\overrightarrow{AG} = \alpha\big(k\mathbf{p} + (1-k)\mathbf{r}\big) = \frac{k^2}{k^2-k+1}\mathbf{p} + \frac{k-k^2}{k^2-k+1}\mathbf{r}. \tag{1}$$

Mivel a $\overrightarrow{BH}$ és $\overrightarrow{HI}$ vektorok ugyanazzal az eljárással állíthatók elő a $\overrightarrow{BC}$ és $\overrightarrow{BA}$, illetve a $\overrightarrow{CA}$ és $\overrightarrow{CB}$ vektorokból, mint az $\overrightarrow{AG}$ vektor az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ vektorokból, azért

$$\overrightarrow{BH} = \frac{k^2}{k^2-k+1}\overrightarrow{BC} + \frac{k-k^2}{k^2-k+1}\overrightarrow{BA}, \tag{2}$$

$$\overrightarrow{CI} = \frac{k^2}{k^2-k+1}\overrightarrow{CA} + \frac{k-k^2}{k^2-k+1}\overrightarrow{CB}. \tag{3}$$

Ezek után a két háromszög súlypontjának egybeesését már egyszerű számolással igazolhatjuk. Valamely O pontból indítsunk helyvektorokat. Az A, B és C pontok helyvektorait jelölje rendre $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$. Ekkor az ABC háromszög súlypontjának helyvektora $(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})/3$. Megmutatjuk, hogy ugyanez a GHI háromszög súlypontjának helyvektora is, amiből következik, hogy a két súlypont egybeesik.

Mivel $\mathbf{u} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ és $\mathbf{v} = \mathbf{c} - \mathbf{a}$, az (1) egyenlőséget felhasználva kapjuk, hogy

$$\overrightarrow{OG} = \mathbf{a} + \overrightarrow{AG} = \mathbf{a} + \frac{k^2}{k^2-k+1}(\mathbf{b}-\mathbf{a}) + \frac{k-k^2}{k^2-k+1}(\mathbf{c}-\mathbf{a}) =$$
$$= \frac{k^2-2k+1}{k^2-k+1}\mathbf{a} + \frac{k^2}{k^2-k+1}\mathbf{b} + \frac{k-k^2}{k^2-k+1}\mathbf{c}.$$

A (2) és (3) egyenlőségekből pedig

$$\overrightarrow{OH} = \frac{k-k^2}{k^2-k+1}\mathbf{a} + \frac{k^2-2k+1}{k^2-k+1}\mathbf{b} + \frac{k^2}{k^2-k+1}\mathbf{c},$$
$$\overrightarrow{OI} = \frac{k^2}{k^2-k+1}\mathbf{a} + \frac{k-k^2}{k^2-k+1}\mathbf{b} + \frac{k^2-2k+1}{k^2-k+1}\mathbf{c}$$

következik. Ezért

$$\frac{\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{OI}}{3} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3},$$

ami éppen a bizonyítandó állítás.

Zsakó László
dolgozatát felhasználva

Megjegyzések. 1. A $k \neq \frac{1}{2}$ feltételt látszólag nem használtuk ki. A különböző, vektorokra vonatkozó egyenlőségek $k = \frac{1}{2}$ esetén is érvényesek, azonban ekkor a G, H és I pontok mind egybeesnek az ABC háromszög súlypontjával, tehát nem jön létre valódi GHI háromszög. Persze a feladat állítása igaz abban a formában, hogy az elfajuló GHI háromszög súlypontja megegyezik ABC súlypontjával.

2. Feladatunkat tulajdonképpen számolás nélkül is megoldhatjuk, felhasználva a következő tételt.

Ha az ABC háromszög csúcsainak helyvektorai $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ és $\boldsymbol{c}$, akkor a háromszög síkjában lévő tetszőleges pont helyvektora egyértelműen felírható $\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}+\gamma\boldsymbol{c}$ alakban, ahol $\alpha+\beta+\gamma=1$.

A következőképpen okoskodhatunk. Az AE és BF egyenesek metszéspontjának helyvektora egyértelműen felírható $\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c}$ alakban, ahol $\alpha+\beta+\gamma=1$. Itt az α, β, γ együtthatók csak a k értékétől függenek. Ezeket akár ki is számolhatnánk, de ez teljesen felesleges, hiszen szimmetria okok miatt a másik két metszéspont helyvektora $\gamma\mathbf{a}+\alpha\mathbf{b}+\beta\mathbf{c}$, illetve $\beta\mathbf{a}+\gamma\mathbf{b}+\alpha\mathbf{c}$ lesz. Ezek alapján a GHI háromszög súlypontjának helyvektora

$$\frac{(\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c})+(\beta\mathbf{a}+\gamma\mathbf{b}+\alpha\mathbf{c})+(\gamma\mathbf{a}+\alpha\mathbf{b}+\beta\mathbf{c})}{3} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3}$$

valóban megegyezik az ABC háromszög súlypontjának helyvektorával.