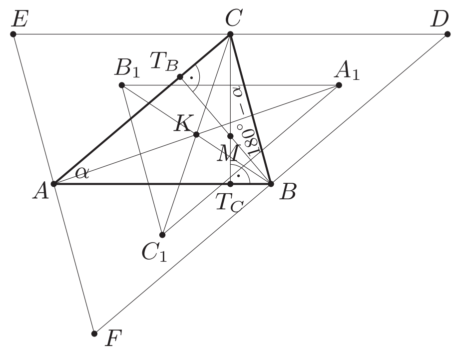
I. megoldás. Legyenek az ABC háromszög szögei α, β és γ, magasságvonalainak talppontjai T_A, T_B és T_C, a háromszög csúcsain átmenő, a szemközti oldallal párhuzamos egyenesek metszéspontjai pedig D, E és F (*1. ábra*).

Az $ABDC$, $BCEA$ és $CAFB$ négyszögek parallelogrammák, mert szemközti oldalaik párhuzamosak. Ezért A, B és C a DEF háromszög oldalfelező pontjai, tehát a BDC, ACE és FBA háromszögek egymás eltoltjai és mindegyikük egybevágó az ABC háromszöggel is.



1. ábra

A AT_CMT_B húrnégyszög, mert T_C-nél és T_B-nél lévő szögei derékszögek. Ezért $T_CMT_B\sphericalangle = 180° - \alpha$. Ennek a szögnek $CMB\sphericalangle$ csúcsszöge, tehát

$$CMB\sphericalangle = 180° - \alpha.$$

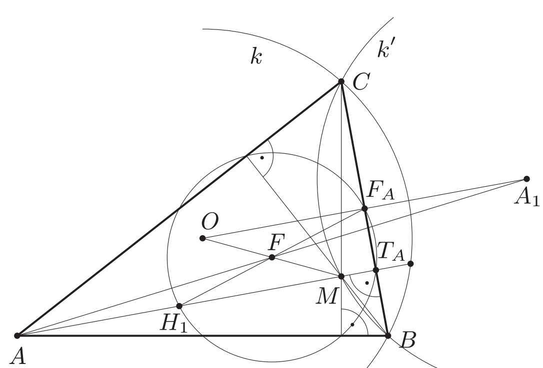
Az $ABDC$ parallelogrammában $CDB\sphericalangle = CAB\sphericalangle = \alpha$, vagyis a $CMBD$ négyszög húrnégyszög, mert szemközti szögeinek összege $180°$. Tehát A_1 egyúttal a CBD háromszög köré írható körének is a középpontja. Ugyanígy kapjuk, hogy B_1 az ACE, C_1 pedig az AFB háromszög köré írható körének a középpontja.

Mivel a BDC, ACE és FBA háromszögek egymás eltoltjai, az egy egyenesre eső oldalaiktól a köré írható köreik középpontjai egyenlő távolságra vannak. Vagyis az $A_1B_1C_1$ háromszög oldalai párhuzamosak a DEF háromszög megfelelő oldalaival, s így a párhuzamosság tranzitivitása miatt az ABC háromszög megfelelő oldalaival is.

Legyen az AA_1 és BB_1 egyenesek metszéspontja K. (Ez a metszéspont létezik, mert B és B_1 az AA_1 egyenes két különböző oldalán helyezkedik el.) Ekkor az ABK és A_1B_1K háromszögek középpontosan hasonlóak a K pontra nézve, mert AK és A_1K valamint BK és B_1K oldalaik páronként egy egyenesre esnek, továbbá AB és A_1B_1 párhuzamosak. Ha φ az a K középpontú hasonlóság, mely a két háromszöget egymásba viszi, akkor az AC egyenes φ-képe az A_1-en átmenő, AC-vel párhuzamos egyenes, azaz A_1C_1 lesz, s ugyanígy belátható, hogy BC képe B_1C_1. Ezért $C = AC \cap BC$ φ-képe $A_1C_1 \cap B_1C_1 = C_1$. Ekkor viszont K, C és C_1 egy egyenesre kell hogy essen.

Vagyis az AA_1, BB_1 és CC_1 egyenesek mindegyike átmegy a K ponton, amivel a feladat állítását beláttuk.

II. megoldás. Ismert, hogy az ABC háromszög Feuerbach-köre, melyet úgy kapunk, hogy a háromszög köré írható O középpontú k kört az M pontból felére kicsinyítjük, áthalad a BC oldal F_A felezőpontján, az AM szakasz H_A felezőpontján és az AM magasságvonal T_A talppontján (*2. ábra*).



Mivel az $F_AT_AH_A$ háromszög derékszögű, a Feuerbach-kör F középpontja, mely az OM szakasz felezőpontja, egybeesik az F_AH_A szakasz felezőpontjával, tehát az OF_A szakasz az MH_A szakasznak F-re vonatkozó tükörképe.

Ha az M pontot tükrözzük a T_A pontra, vagy ami ugyanazt jelenti, a BC egyenesre, a tükörkép a k körön van, mert mint az I. megoldásban láttuk,

$$CMB\sphericalangle + CAB\sphericalangle = 180°.$$

Ebből következik, hogy a BMC háromszög köré írható köre megegyezik a k kör BC egyenesre vonatkozó k' tükörképével, tehát az A_1 pont éppen az O pontnak F_A-ra vonatkozó tükörképe. Így hát az is igaz, hogy az OA_1 szakasz az MA

szakasznak F-re vonatkozó tükörképe. Ez azt jelenti, hogy az AA_1 szakasz felezőpontja éppen az F pont. Szimmetria okok miatt ugyanez igaz a BB_1 és CC_1 szakaszokra is.

Tehát az AA_1, BB_1 és CC_1 szakaszok nemcsak egy ponton mennek át, hanem közös a felezőpontjuk, s az megegyezik az ABC háromszög Feuerbach-körének középpontjával.