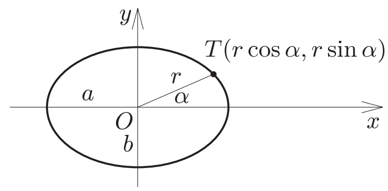
Megoldás. Vegyünk fel egy olyan derékszögű koordinátarendszert, amelynek origója O, és benne az ellipszis egyenlete $\left(\frac{X}{a}\right)^2+\left(\frac{Y}{b}\right)^2=1$.



1. ábra

Ha az ellipszis tetszőleges T pontjára $OT=r$ és az OT szakasz az x tengely pozitív felével α irányított szöget zár be, akkor a T pont koordinátái $(r\cos\alpha, r\sin\alpha)$. Ezért

$$\left(\frac{r\cos\alpha}{a}\right)^2+\left(\frac{r\sin\alpha}{b}\right)^2=1,\quad \text{azaz}\quad \frac{1}{OT^2}=\frac{1}{r^2}=\frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\sin^2\alpha}{b^2}. \tag{1}$$

Jelölje $j=1,2,\dots,n$ esetén a P_j pont O-ra vonatkozó tükörképét P_{n+j}. Ekkor $OP_j=OP_{n+j}$. Ha az OP_i szakasznak az x tengely pozitív felével bezárt irányított szöge α_i $(i=1,2,\dots,2n)$, akkor minden $1\le i<2n$ esetén fennáll a

$$P_iOP_{i+1}\sphericalangle=\alpha_{i+1}-\alpha_i=\frac{\pi}{n}$$

egyenlőség. Ezért $\alpha_i=\alpha_1+(i-1)\frac{\pi}{n}$ minden $1\le i\le 2n$ esetén, tehát az (1) összefüggést, valamint a $\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ azonosságot felhasználva kapjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{OP_i^2}=\sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{OP_i^2}=\frac{1}{a^2}\sum_{i=1}^{2n}\cos^2\alpha_i+\frac{1}{b^2}\sum_{i=1}^{2n}\sin^2\alpha_i=$$
$$=\frac{1}{a^2}\sum_{i=1}^{2n}\cos^2\left(\alpha_1+\frac{(i-1)\pi}{n}\right)+\frac{1}{b^2}\sum_{i=1}^{2n}\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\left(\alpha_1+\frac{(i-1)\pi}{n}\right)\right).$$

Vagyis feladatunk állításának igazolásához elegendő azt megmutatni, hogy bármely β szög esetén

$$\sum_{i=1}^{2n}\cos^2\left(\beta+\frac{(i-1)\pi}{n}\right)=n.$$

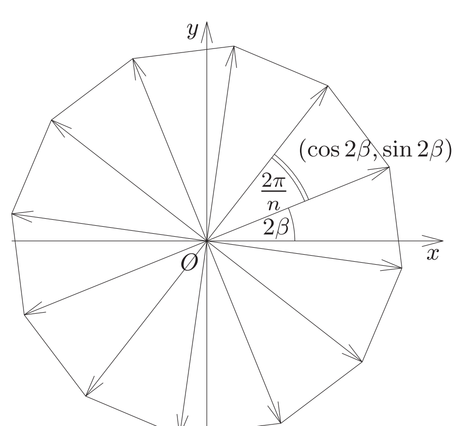
A $\cos 2\beta=2\cos^2\beta-1$ összefüggés szerint ez egyenértékű a

$$\sum_{i=1}^{2n}\cos\left(2\beta+(i-1)\frac{2\pi}{n}\right)=0$$

egyenlőséggel, a koszinuszfüggvény periodicitása miatt utóbbi pedig a

$$\sum_{i=1}^{n}\cos\left(2\beta+(i-1)\frac{2\pi}{n}\right)=0$$

egyenlőséggel. Itt a bal oldalon az O középpontú egységsugarú körbe írt olyan szabályos n-szög csúcsainak x-koordinátái szerepelnek összeadandóként, amelynek egyik csúcsa a $(\cos 2\beta, \sin 2\beta)$ pont (*2. ábra*).



2. ábra

Ezen koordináták összege megegyezik az O középpontból a sokszög csúcsaiba mutató vektorok összegének első koordinátájával. Viszont ez az összegvektor nem változik meg, ha a sokszöget O körül $\frac{2\pi}{n}$ szöggel elforgatjuk. Olyan vektor viszont, amely a $\frac{2\pi}{n}$-szögű elforgatásnál nem változik, csak egy van, a $\mathbf{0}$. Ennek persze mindkét koordinátája 0, tehát a koszinuszok összege is 0, amivel állításunkat beláttuk.