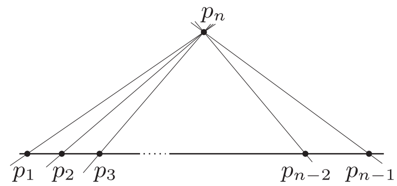
I. megoldás. A halmaz elemei legyenek $p_1, \ldots, p_n$, a kiválasztott részhalmazok pedig $L_1, \ldots, L_m$. Ha valamelyik p_i csak egyetlen L_j-ben szerepel, akkor a feltételek szerint abban a részhalmazban az összes elemnek szerepelnie kell, további részhalmaz pedig nem lehet kiválasztva, vagyis ekkor $m = 1$. Tegyük fel tehát, hogy minden p_i legalább két L_j-ben szerepel.



1. ábra

Minden p_i elemhez rendeljünk hozzá egy m tagú $\mathbf{v}_i = \left(v_1^i, v_2^i, \ldots, v_m^i\right)$ számsorozatot, amelynek j-edik tagja 1, ha $p_i \in L_j$, egyébként pedig 0. Ha $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ és $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m)$ két m-tagú valós számsorozat, α pedig tetszőleges valós szám, akkor legyen

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, \ldots, x_m + y_m), \quad \alpha\mathbf{x} = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_m), \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + \ldots + x_m y_m.$$

Ezek a műveletek a térbeli vektorok összeadásának, számmal való szorzásának és skaláris szorzatának természetes általánosításai. Könnyen meggondolható, hogy az összeadás kommutativitásán és asszociativitásán túl még a következő, a vektorműveleteknél megszokott azonosságok is érvényesek:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle, \quad \langle \alpha\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle, \quad \langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle.$$

Mivel a feladat feltétele szerint bármely két különböző elem pontosan egy kiválasztott részhalmazban szerepel együtt, azért $i \neq j$ esetén $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = 1$. Feltevésünk szerint pedig minden kiválasztott részhalmaz legalább két elemű, tehát minden i-re a v_j^i számok közt legalább kettő darab 1-es szerepel, azaz $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle \geq 2$.

Ezek alapján, ha $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ olyan valós számok, melyekre $\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$, akkor

$$\begin{aligned}
0 = \langle \mathbf{0}, \mathbf{0} \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_i \alpha_j \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 (\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle - 1) + \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_i \alpha_j \right) = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \big(\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle - 1 \big) + \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \right)^2,
\end{aligned}$$

ami $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle - 1 > 0$ miatt csak úgy teljesülhet, ha $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Az $\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ feltétel tagonként egy-egy lineáris egyenletet jelent az $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ismeretlenekre nézve:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 v_1^1 + \alpha_2 v_1^2 \ldots + \alpha_n v_1^n &= 0, \\
\alpha_1 v_2^1 + \alpha_2 v_2^2 \ldots + \alpha_n v_2^n &= 0, \\
&\vdots \\
\alpha_1 v_m^1 + \alpha_2 v_m^2 \ldots + \alpha_n v_m^n &= 0.
\end{aligned}$$

Ennek az m darab egyenletből álló egyenletrendszernek tehát csak egyetlen megoldása van, mégpedig az $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$.

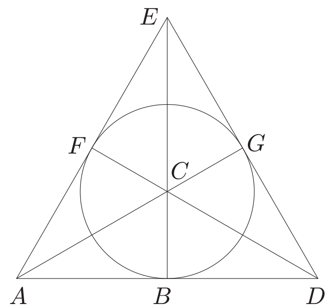
Megmutatjuk, hogy ez csak akkor lehetséges, ha $m \geq n$. Valóban, ha $m < n$ lenne, vagyis az egyenletek száma kisebb lenne az ismeretlenek számánál, akkor az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása lenne. Ekkor ugyanis így okoskodhatnánk: ha α_n minden egyenletben 0 együtthatóval szerepel, akkor értékét tetszőlegesen megválaszthatjuk. Ha valamelyik egyenletben nem 0 az együtthatója, akkor abból az egyenletből α_n kifejezhető a többi ismeretlen segítségével. Ezt a többi egyenletbe beírva kapunk egy $m-1$ egyenletből álló, $n-1$ ismeretlent tartalmazó lineáris egyenletrendszert, ahol az egyenlőségek jobb oldalán ismét csak 0-k állnak. Ezt ismételgetve végül az egyenletrendszert egyetlen egyenletre redukálhatjuk, amelyben legalább két ismeretlen szerepel, ennek viszont nyilván végtelen sok megoldása van.

II. megoldás. Jelöljük halmazunkat $\mathcal{P}$-vel, a kiválasztott részhalmazok halmazát pedig $\mathcal{L}$ -lel. Feladatunk valójában a *véges geometriák* témakörébe tartozik, ezért az ott szokásos elnevezéseket fogjuk használni. A továbbiakban $\mathcal{P}$ elemeit *pontoknak,* $\mathcal{L}$ elemeit pedig *egyeneseknek* nevezzük. Ha feltesszük, hogy $\mathcal{L}$ legalább kételemű, akkor a $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ párra teljesülnek a következők:

(i) bármely két különböző ponthoz pontosan egy olyan egyenes van, amely őket tartalmazza,

(ii) minden egyenes legalább két pontot tartalmaz,

(iii) legalább két egyenes van.



2. ábra

Az ilyen struktúrát *lineáris térnek* nevezik. Feladatunk tehát annak belátása, hogy bármely lineáris térben az egyenesek száma legalább annyi, mint a pontok száma. (Ez a lineáris terekre vonatkozó alapvető egyenlőtlenség, melyet *De Bruijn–Erdős* egyenlőtlenségnek neveznek, mivel az első bizonyítások e két matematikustól származnak. Az itt közölt bizonyítás megtalálható *Kiss Gy. – Szőnyi T.: Véges geometriák* című könyvében.)

A továbbiakban tegyük fel, hogy $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$, $\mathcal{L} = \{L_1, L_2, \ldots, L_m\}$ és jelölje n_i a p_i ponton átmenő egyenesek számát $i = 1, 2, \ldots, n$ esetén, $j = 1, 2, \ldots, m$ esetén pedig m_j az L_j elemszámát, azaz a j-edik egyenesre illeszkedő pontok számát.

Ezekre az értékekre egyszerű leszámlálás segítségével felírhatunk három egyenlőséget. Ha az illeszkedő pont–egyenes párokat először úgy számoljuk össze, hogy megnézzük, hogy egy rögzített ponton hány egyenes megy át, másodjára pedig úgy, hogy megszámoljuk, hogy egy rögzített egyenesre hány pont illeszkedik, akkor a kétféle leszámlálás eredményének meg kell egyeznie, ezért

$$\sum_{i=1}^{n} n_i = \sum_{j=1}^{m} m_j. \tag{1}$$

Ugyanilyen módszerrel kétféleképpen leszámolva az illeszkedő pontpár–egyenes rendezett hármasokat, felhasználva, hogy két különböző pontnak egyértelműen létezik összekötő egyenese, a következő egyenlőséget kapjuk:

$$n(n-1) = \sum_{j=1}^{m} m_j(m_j - 1). \tag{2}$$

Ha pedig egy p_i pontot fixálunk és az (1) egyenlőséget csak az azon átmenő egyenesekre alkalmazzuk, akkor az

$$n - 1 = \sum_{p \in L_j \in \mathcal{L}} (m_j - 1) \tag{3}$$

egyenlőséghez jutunk. Ez szemléletesen azt tükrözi, hogy a p_i pont minden további ponttal egy egyértelmű egyenessel van összekötve.

Ha $m > n$, akkor készen vagyunk. Tegyük fel, hogy $m \leq n$. Azt kell belátnunk, hogy ekkor itt egyenlőség áll fenn. Először megmutatjuk, hogy ha a p_i pont nincs rajta az L_j egyenesen, akkor $n_i \geq m_j$, és egyenlőség pontosan akkor áll, ha minden p_i-n átmenő egyenes metszi L_j-t. Ez abból következik, hogy p_i-t össze tudjuk kötni L_j minden pontjával, s az így kapott m_j darab egyenes páronként különböző lesz, mert két különböző pontnak egyértelműen létezik összekötő egyenese. Ha egyenlőség áll, akkor pedig p_i-n át nem is megy több egyenes.

Mivel $n \geq m$ és $n_i \geq m_j$ minden nem-illeszkedő (p_i, L_j) pont–egyenes párra, így $n_i(n - m_j) \geq m_j(m - n_i)$, azaz

$$\frac{n_i}{m - n_i} \geq \frac{m_j}{n - m_j}$$

teljesül minden nem-illeszkedő (p_i, L_j) pont–egyenes párra. Adjuk össze ezeket az egyenlőtlenségeket minden ilyen párra. Ha a bal oldalakat pontról pontra összeadjuk, akkor a következőt kapjuk:

$$\sum_{p_i \notin L_j} \frac{n_i}{m - n_i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j\,:\,p_i \notin L_j} \frac{n_i}{m - n_i} = \sum_{p=1}^{n} n_i, \tag{4}$$

mivel minden p_i ponthoz pontosan $m - n_i$ olyan egyenes található, amely őt nem tartalmazza. Hasonlóan, ha a jobb oldalakat egyenesről egyenesre adjuk össze, akkor azt kapjuk, hogy

$$\sum_{i\,:\,p_i \notin L_j} \frac{m_j}{n - m_j} = \sum_{j=1}^{m} m_j.$$

Vagyis a (4) egyenlőtlenség miatt

$$\sum_{i=1}^{n} n_i \geq \sum_{j=1}^{m} m_j,$$

itt viszont az (1) egyenlőség miatt egyenlőségnek kell fennállnia. Ez viszont csak úgy lehet, ha $m = n$, ami éppen a bizonyítandó állítás.

Megjegyzés. Ha az egyenlőség esetét tovább vizsgáljuk, akkor azt kapjuk, hogy valamennyi (p_i, L_j) nem-illeszkedő pont–egyenes párra az $n_i = m_j$ egyenlőségnek is teljesülni kell. Ez azt jelenti, hogy $m = n$ esetén a lineáris tér bármely két egyenese metszi egymást. Ha van olyan egyenes, amely két pontból áll, akkor nem nehéz belátni, hogy a lineáris terünk csak az *1. ábrán* látható lehet. Itt $L_i = \{p_i, p_n\}$ ha $1 \leq i < n$, és $L_n = \{p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}\}$. Ha viszont minden egyenes legalább három pontból áll, akkor struktúránk ún. *véges projektív sík* lesz. Erre a legegyszerűbb példa a *2. ábrán* látható *Fano-sík*. Ebben az esetben $\mathcal{P} = \{A, B, C, D, E, F, G\}$, az egyenesek pedig $\{A, B, D\}$, $\{B, C, E\}$, $\{C, D, F\}$, $\{D, E, G\}$, $\{E, F, A\}$, $\{F, G, B\}$ és $\{G, A, C\}$.