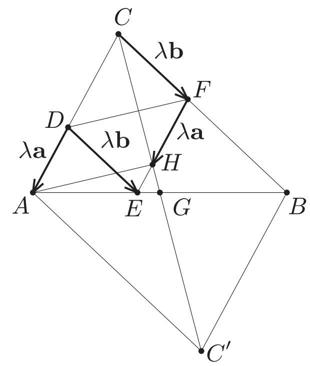
Megoldás. Legyen az AB oldal felezőpontja G, a C pont G-re vonatkozó tükörképe C', H pedig jelölje azt a pontot, melyre az $FDAH$ négyszög paralelogramma. Először megmutatjuk, hogy H rajta van a CC' szakaszon.



1. ábra

Mivel DE párhuzamos CB-vel, az ADE és ACB háromszögek hasonlóak. Legyen a hasonlóság aránya λ. Ekkor $0 < \lambda < 1$. Ha $\overrightarrow{CA} = \mathbf{a}$ és $\overrightarrow{CB} = \mathbf{b}$, akkor tehát $\overrightarrow{DA} = \lambda\mathbf{a}$ és $\overrightarrow{DE} = \lambda\mathbf{b}$. Ezért $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{DA} = (1-\lambda)\mathbf{a}$, s így felhasználva, hogy a $CDEF$ és az $AHFD$ paralelogrammák szemközti oldalvektorai egyenlőek, kapjuk, hogy

$$\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AH} = \mathbf{a} + \overrightarrow{DF} = \mathbf{a} + \overrightarrow{CF} - \overrightarrow{CD} =$$
$$= \mathbf{a} + \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{CD} = \mathbf{a} + \lambda\mathbf{b} - (1-\lambda)\mathbf{a} = \lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \lambda\overrightarrow{CC'}.$$

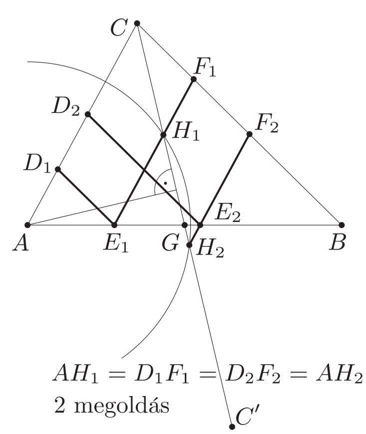
Vagyis a H pont rajta van a CC' szakaszon.

Ezek alapján a szerkesztés menete a következő. Az A csúcs, mint középpont körül DF sugárral kört rajzolunk, a kör és a CC' szakasz H metszéspontján át AC-vel párhuzamos e egyenest szerkesztünk. Az e és AB, illetve CB metszéspontjai adják a szerkesztendő paralelogramma E, illetve F csúcsát. Végül az E-n át CB-vel húzott párhuzamos kimetszi CA-ból a D pontot. Az így szerkesztett $CDEF$ négyszög nyilván paralelogramma, s ha $\overrightarrow{CH} = \lambda\overrightarrow{CC'} = \lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b})$, akkor a párhuzamosságok miatt $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CF} = \lambda\mathbf{b}$ és ezért $\overrightarrow{DA} = \lambda\mathbf{a}$. Ekkor viszont

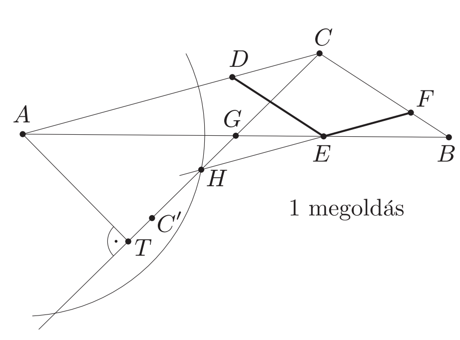
$$\overrightarrow{DF} = \lambda\mathbf{b} - (1-\lambda)\mathbf{a} = \lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b}) - \mathbf{a} = \overrightarrow{CH} - \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AH},$$

vagyis DF ugyanolyan hosszú, mint AH, tehát a $CDEF$ négyszög eleget tesz a feltételeknek.

A megoldások száma 2, 1 vagy 0, attól függően, hogy az A középpontú DF sugarú körnek és a nyílt CC' szakasznak hány közös pontja van. Ezt részletesebben az A-ból a CC' egyenesre bocsátott merőleges T talppontjának elhelyezkedését vizsgálva írhatjuk le.



2. ábra



3. ábra

- 2 megoldás van, ha T a CC' szakasz belső pontja és $AT < EF < \min\{AB, AC\}$ (*2. ábra*).
- 1 megoldás van, ha
  - T a CC' szakasz belső pontja és $AT = EF$;
  - T a CC' szakasz belső pontja és
  $$AT < \min\{AB, AC\} < EF < \max\{AB, AC\};$$
  - T nem belső pontja a CC' szakasznak és $AT \leq \min\{AB, AC\} < EF < \max\{AB, AC\}$ (*3. ábra*).
- Ha az előző feltételek egyike sem teljesül, akkor nincs megoldás.

A DF átló hossza nyilván akkor minimális, ha AH minimális. Ismét megkülönböztetünk két esetet. Ha T a CC' szakasz belső pontja, akkor ez $H \equiv T$ esetén következik be, ha pedig T nem belső pont, akkor az átló hosszának nincs minimuma. Ekkor DF legrövidebb hossza tetszőlegesen közel lehet az AB és AC oldalak közül a rövidebbikhez akkor, ha H tetszőlegesen közel van a C vagy a C' ponthoz, de minden esetben hosszabb lesz a két oldal közül a rövidebbiknél.