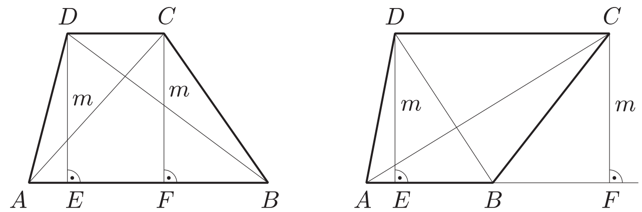
Megoldás. Az $ABCD$ érintőtrapéz alapjai legyenek AB és CD, magassága m. A C és D csúcsok AB egyenesen lévő merőleges vetületeit jelölje F és E. Tegyük fel, hogy mindkét átló 45°-nál nagyobb szöget zár be az alapokkal. Ekkor az AFC és BED derékszögű háromszögekben FC és ED a hosszabb befogók, tehát

$$AF + BE < FC + ED = 2m \leq BC + DA. \tag{1}$$



Megmutatjuk, hogy $AF + BE = AB + CD$. Az A, B, E, F pontok sorrendje többféle lehet (lásd az *ábrákat*), ezért a diszkussziót elkerülendő, vektorok segítségével bizonyítunk. Nyilván igaz, hogy

$$\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BA} = \mathbf{0}.$$

Mivel $\overrightarrow{FC} = -\overrightarrow{DE}$, ebből átrendezéssel kapjuk, hogy

$$\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{EB} = -\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AB}.$$

Mivel ezek a vektorok mind párhuzamosak a trapéz alapjaival, azért egyenlőségük a megfelelő szakaszok hosszának egyenlőségét is jelenti, tehát $AF + BE = AB + CD$.

Ezt az (1) egyenlőségbe beírva kapjuk, hogy

$$AB + CD = AF + BE < BC + DA.$$

Ez viszont ellentmondás, mert bármely érintőnégyszög szemközti oldalai hosszának összege megegyezik. Ezért feltevésünk hibás, tehát egy érintőtrapéznak mindig van olyan átlója, amelyik az alapokkal legfeljebb 45°-os szöget zár be.