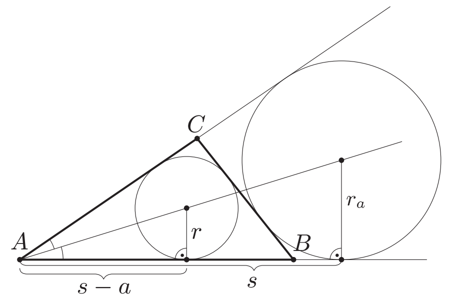
I. megoldás. Jelölje az ABC háromszög $AB = c$ oldalához tartozó magasságát m_c, r_a és r_b pedig a $BC = a$, illetve $AC = b$ oldalakhoz hozzáírt körök sugarát. Szokás szerint a háromszög területét jelölje T, beírt körének sugarát r, kerületének felét pedig s. Mivel a magasságoknak egymáshoz képest nincs kitüntetett szerepük, elegendő az $m_c \le \sqrt{r_a r_b}$ egyenlőtlenséget igazolnunk, ami ekvivalens az $m_c^2 \le r_a r_b$ egyenlőtlenséggel.



Az A csúcs, a beírt kör középpontja és az a oldalhoz hozzáírt kör középpontja egyaránt az A-ból induló belső szögfelezőn helyezkedik el, továbbá e két kör az AB félegyenest az A csúcstól $s-a$, illetve s távolságban érinti, ezért a párhuzamos szelők tételét alkalmazva kapjuk, hogy $r_a : r = s : (s-a)$, azaz $r_a = \frac{rs}{s-a}$. Ugyanígy adódik, hogy $r_b = \frac{rs}{s-b}$. Az $rs = T = \frac{cm_c}{2}$ összefüggésből következő $\frac{rs}{m_c} = \frac{c}{2}$ egyenlőséget is felhasználva:

$$\frac{r_a r_b}{m_c^2} = \frac{r^2 s^2}{(s-a)(s-b)m_c^2} = \frac{c^2}{4(s-a)(s-b)} = \frac{c^2}{c^2-(a-b)^2} \ge 1.$$

Tehát $r_a r_b \ge m_c^2$ mindig teljesül, egyenlőség pedig pontosan akkor áll fenn, ha $a = b$.

II. megoldás. A hozzáírt körök sugarára vonatkozó képlet ismeretében másképp is beláthatjuk a bizonyítandó egyenlőtlenséget:

$$m_c = \frac{2T}{c} = \frac{2T}{(s-a)+(s-b)} = \frac{2}{\frac{s-a}{T}+\frac{s-b}{T}} = \frac{2}{\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}} \le \sqrt{r_a r_b},$$

ahol az utolsó lépésben a harmonikus és a mértani közepek közti egyenlőtlenséget alkalmaztuk.