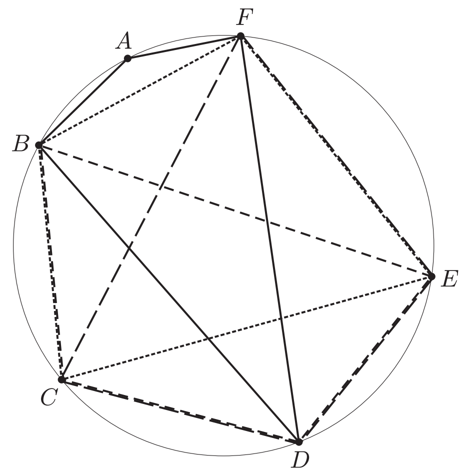
Megoldás. A megoldásban többször fogjuk használni *Ptolemaiosz* tételét. Eszerint *bármely húrnégyszög átlóinak szorzata egyenlő a két szemközti oldalpár szorzatainak összegével.* (A tétel bizonyítása megtalálható például a *Geometriai feladatok gyűjteménye I.* kötetében, 1259. feladat.)

Először írjuk fel a tételt a $BCEF$ húrnégyszögre, majd a kapott egyenlőségeket szorozzuk meg AD-vel:

$$\begin{aligned} BE \cdot CF &= CE \cdot BF + BC \cdot EF, \\ AD \cdot BE \cdot CF &= AD \cdot BF \cdot CE + \\ &\quad + AD \cdot BC \cdot EF. \end{aligned} \tag{1}$$



Az $ABDF$ négyszög is húrnégyszög, ezért

$$AD \cdot BF = AB \cdot DF + AF \cdot BD.$$

Ezt (1)-be helyettesítve, majd rendezve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} AD \cdot BE \cdot CF &= CE \cdot (AB \cdot DF + AF \cdot BD) + AD \cdot BC \cdot EF = \\ &= AF \cdot BD \cdot CE + AB \cdot CE \cdot DF + AD \cdot BC \cdot EF. \end{aligned} \tag{2}$$

A $BCDE$ és a $CDEF$ húrnégyszögekben felírva Ptolemaiosz tételét

$$\begin{aligned} BD \cdot CE &= BC \cdot DE + BE \cdot CD, \\ CE \cdot DF &= CF \cdot DE + CD \cdot EF. \end{aligned}$$

Ezeket behelyettesítve (2)-be, majd rendezve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} AD \cdot BE \cdot CF &= AF \cdot (BC \cdot DE + BE \cdot CD) + AB \cdot (CF \cdot DE + CD \cdot EF) + \\ &\quad + AD \cdot BC \cdot EF = \\ &= AF \cdot BC \cdot DE + AF \cdot BE \cdot CD + AB \cdot CF \cdot DE + \\ &\quad + AB \cdot CD \cdot EF + AD \cdot BC \cdot EF, \end{aligned}$$

ahonnan az állítás már közvetlenül leolvasható.