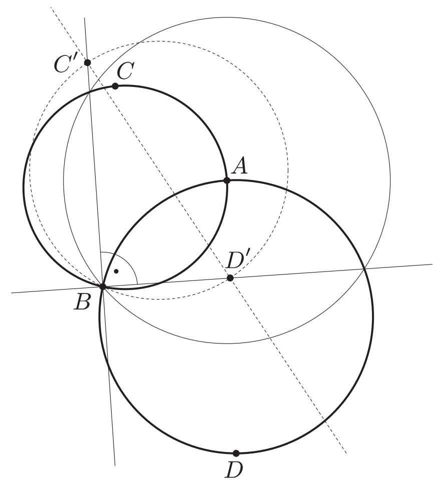
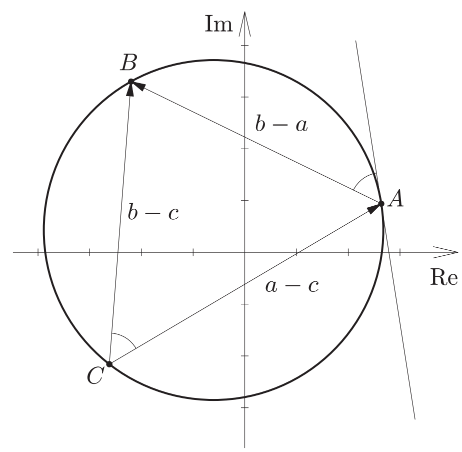
I. megoldás. Végezzünk inverziót, melynek alapköre legyen az A középpontú, AB sugarú kör. A B pont képe így önmaga, a C és D pont képe pedig legyen C', illetve D'. Az inverzió szögtartó, ezért az ABC és ABD körök inverz alakzatai is merőlegesen fogják egymást metszeni. Mivel mindkét kör átmegy az alapkör középpontján, inverz képük egy-egy egyenes lesz: a BC' és BD' egyenesek. Ezek merőlegesek egymásra, így a $BC'D'$ háromszög derékszögű. Az ACD kör is átmegy az alapkör középpontján, képe a $D'C'$ egyenes, azaz a derékszögű háromszög átfogójának egyenese.



A BCD kör nem megy át az alapkör középpontján, képe így a $BC'D'$ kör lesz. Ez a kör a $BC'D'$ derékszögű háromszög köré írt köre, ahol az átfogó egyenese $(D'C')$ a Thálesz-tétel szerint egyben a $BC'D'$ kör egyik átmérőjének egyenese. A $D'C'$ ezek szerint átmegy a $BC'D'$ kör középpontján, így az egyenes a kört merőlegesen metszi. Ebből következik, hogy az eredeti körök, ACD és BCD is merőlegesen metszették egymást.

Hajdók Soma(Budapest, Németh László G.11. évf.)

II. megoldás. Oldjuk meg a feladatot komplex számok segítségével. Az A, B, C és D pontokba mutató vektoroknak feleljenek meg az a, b, c, d komplex számok. Tekintsük az ABC háromszöget és annak körülírt körét.



A kerületi szögek tétele miatt az A pontba húzott érintő éppen akkora szöget zár be AB-vel, mint amekkora a $BCA\sphericalangle$. Tehát, ha $(b-a)$-t megszorozzuk $\dfrac{a-c}{b-c}$-vel, akkor az A pontba húzott érintő irányába mutató vektort kapunk: $\dfrac{a-c}{b-c}(b-a)$. Hasonlóképpen tekintve az ABD kört, itt az A-hoz húzott érintő iránya megegyezik az $\dfrac{a-d}{b-d}(b-a)$ vektor irányával. E két érintő pontosan akkor merőleges egymásra, ha a két vektor hányadosának $\left(\dfrac{(a-c)(b-d)}{(b-c)(a-d)}\right)$ valós része 0.

Az ACD és a BCD körök metszésére ugyanez a feltétel jön ki, így ugyanakkor metszik egymást merőlegesen, mint a fenti két kör.

Mészáros András (Győr, Révay Miklós. G., 11. évf.)