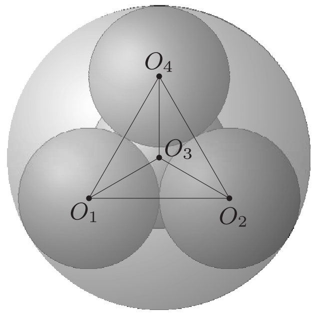
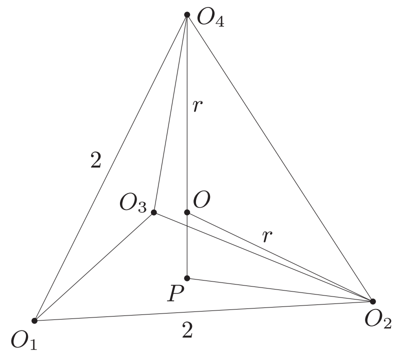
Megoldás. Legyen a nagy gömb középpontja O, a kis gömböké O_1, O_2, O_3, O_4. A négy középpont egy szabályos tetraéder négy csúcsa (*1. ábra*). A tetraéder köré gömb írható és nyilván ezen gömb középpontja egybeesik a nagy gömb O középpontjával.



1. ábra



2. ábra

Jelöljük a tetraéder köré írt gömb sugarát r-rel, a nagy gömb sugarát R-rel. Tekintsük a tetraéder $O_1O_2O_3$ háromszögét alapnak (*2. ábra*). A háromszög oldalainak hossza 2 egység. Az O_4 csúcs merőleges vetülete az alapra P. A tetraéder köré írt gömb O középpontja illeszkedik az O_4P szakaszra.

Az O_2PO_4 derékszögű háromszögben $O_4O_2 = 2$,

$$PO_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

mivel O_2P a 2 egység oldalú szabályos háromszögben súlyvonal (és egyben magasságvonal) kétharmada. Az O_2PO_4 háromszögben felírhatjuk a Pitagorasz-tételt a tetraéder O_4P magasságára:

$$O_4P^2 = O_4O_2^2 - PO_2^2, \quad \text{azaz} \quad O_4P = \sqrt{2^2 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

Az OPO_2 háromszögre is írjuk fel a Pitagorasz-tételt az $OO_2 = r$, $OP = \dfrac{2\sqrt{6}}{3} - r$, és $PO_2 = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ oldalakra:

$$r^2 = \left(\frac{2\sqrt{6}}{3} - r\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2,$$

innen $r = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$. A nagy gömb sugara pedig

$$R = r + 1 = \frac{\sqrt{6}}{2} + 1 = \frac{\sqrt{6}+2}{2}.$$

A nagy gömb térfogata:

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{6}+2}{2}\right)^3.$$

A négy, egységsugarú gömb együttes térfogata:

$$V_2 = 4 \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot 1^3 = \frac{16\pi}{3}.$$

A térfogatok aránya:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{16\pi}{3}}{\frac{4\pi}{3}\left(\frac{\sqrt{6}+2}{2}\right)^3} = \frac{4}{\frac{(\sqrt{6}+2)^3}{8}} = \frac{32}{\left(\sqrt{6}+2\right)^3} \approx 0{,}36.$$