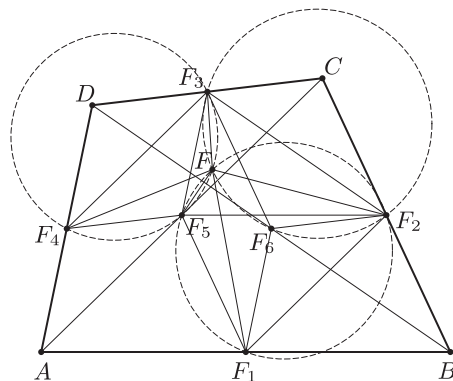


Megoldás. Ismert a Feuerbach-körnek az a tulajdonsága, hogy átmegy a háromszög oldalfelező pontjain. Ezt fogjuk kihasználni a bizonyítás során. Az *ábra* jelölései alapján az F_i -k a megfelelő oldalak felezőpontjai, az ezeket összekötő szakaszok középvonalak. Egy háromszög oldalhoz az a középvonal tartozik, amelyik párhuzamos és fele akkora mint az oldal. Emiatt a középvonalak által alkotott háromszög hasonló ez eredetihez és a hasonlóság aránya $\frac{1}{2}$.

Tekintsük két, egy átlóhoz tartozó háromszög Feuerbach-körét, például ABC és ADC háromszögeket. Könnyen belátható, hogy ha ennek a két körnek csak egy közös pontja van, akkor az eredeti négyszög átlói felezik egymást, tehát rombuszról van szó, és ekkor az állítás nyilvánvaló.

Tehát feltehetjük, hogy a köröknek két metszéspontja van, F_5 és F . Ha sikerül megmutatnunk, hogy F rajta van $BDC\Delta$ vagy $ABD\Delta$ Feuerbach-körén, akkor készen vagyunk, mert hasonló elgondolás alapján a másikén is rajta lesz.



Megmutatjuk, hogy az $FF_3F_2F_6$ négyszög húrnégyszög. Ugyanis ekkor – mivel ebből három pont $BDC\Delta$ Feuerbach-körén van – a negyedik is azon lesz.

A középvonalak tulajdonságai miatt

$$F_1F_5F_2\angle = ABC\angle, \quad \text{valamint} \quad F_5F_2F_1\angle = CAB\angle.$$

Ezután a kerületi szögek tétele miatt $F_1F_5F_2\angle = F_1FF_2\angle$ és $F_5F_2F_1\angle = F_5FF_1\angle$.

Hasonlóan

$$F_4F_5F_3\angle = ADC\angle, \quad \text{valamint} \quad F_4F_3F_5\angle = DAC\angle.$$

A kerületi szögek tétele miatt pedig $F_4F_5F_3\angle = F_4FF_3\angle$ és $F_4F_3F_5\angle = F_4FF_5\angle$.

Ez viszont azt jelenti, hogy

$$\begin{aligned} F_3FF_2\angle &= 360^\circ - (F_4FF_3\angle + F_4FF_5\angle + F_5FF_1\angle + F_1FF_2\angle) = \\ &= 360^\circ - (ADC\angle + DAC\angle + CAB\angle + ABC\angle) = \\ &= 360^\circ - (ADC\angle + DAB\angle + ABC\angle) = DCB\angle. \end{aligned}$$

Viszont a középvonalak tulajdonságai miatt $F_3F_6F_2\angle = DCB\angle$. Ez azt jelenti, hogy $F_3FF_2\angle$ és $F_3F_6F_2\angle$ is egy húrhoz, az F_3F_2 -höz tartozó kerületi szögek. Azaz $FF_3F_2F_6$ négyszög húrnégyszög. Ezt kívántuk belátni.

Az állítás konkáv négyszögekre is igaz, és hasonló gondolatmenettel látható be.

Hajnal Máté (Kecskeméti Ref. G. 12. évf.)
dolgozata alapján