I. megoldás. Mivel a, b, c pozitív számok, az egyenlőtlenség mindkét oldala pozitív. Vegyük az egyenlőtlenség oldalainak 10-es alapú logaritmusát. Ez a függvény szigorúan monoton növekedő, tehát a reláció iránya változatlan marad.

$$\lg\left(a^b b^c c^a\right) \leq \lg\left(a^a b^b c^c\right).$$

Alkalmazzuk most a szorzat és a hatvány logaritmusára vonatkozó azonosságokat.

$$lg\left(a^b\right)+\lg\left(b^c\right)+\lg\left(c^a\right) \leq \lg\left(a^a\right)+\lg\left(b^b\right)+\lg\left(c^c\right),$$
$$b\cdot\lg a+c\cdot\lg b+a\cdot\lg c \leq a\cdot\lg a+b\cdot\lg b+c\cdot\lg c.$$

Használjuk fel a rendezési tételt, miszerint két valós számokból álló azonos elemszámú sorozat permutációból képzett szorzatösszeg akkor maximális, ha a két sorozat azonosan rendezett.

Legyen most a két háromelemű sorozat a, b, c és $\lg a$, $\lg b$, $\lg c$. A logaritmusfüggvény szigorú monoton növekedése miatt a két sorozat azonosan rendezett, így

$$b\cdot\lg a+c\cdot\lg b+a\cdot\lg c \leq a\cdot\lg a+b\cdot\lg b+c\cdot\lg c$$

teljesül, az átalakítások ekvivalenciája miatt az eredeti egyenlőtlenség is igaz. Egyenlőség $a=b=c$ esetén áll fenn.

II. megoldás. Először egy jól használható algebrai egyenlőtlenséget idézünk fel. Legyenek a, b, c pozitív számok, ekkor

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0.$$

Kifejtés után osszunk végig kettővel, majd adjunk mindkét oldalhoz $3(ab+bc+ca)$-t.

$$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca \geq 0,$$
$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca \geq 0,$$
$$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca \geq 3ab+3bc+3ca.$$

Most mindkét oldalt a pozitív $3(a+b+c)$-vel elosztva kapjuk, hogy

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \frac{ab+bc+ca}{a+b+c}. \tag{1}$$

Alkalmazzuk két változatban a súlyozott közepek közötti ismert egyenlőtlenségeket. Először írjuk fel az a, b, c pozitív számokra, a, b, c súlyokkal a súlyozott mértani és harmonikus közép közötti egyenlőtlenséget:

$$\left(a^a b^b c^c\right)^{\frac{1}{a+b+c}} \geq \frac{a+b+c}{a\cdot\frac{1}{a}+b\cdot\frac{1}{b}+c\cdot\frac{1}{c}} = \frac{a+b+c}{3}. \tag{2}$$

Ezután az a, b, c számokra b, c, a súlyokkal használjuk fel a súlyozott számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget.

$$\frac{b\cdot a+c\cdot b+a\cdot c}{a+b+c} \geq \left(a^b b^c c^a\right)^{\frac{1}{a+b+c}}. \tag{3}$$

Végül (1), (2) és (3) egybevetéséből, az egyenlőtlenség mindkét oldalát $(a+b+c)$-edik hatványra emelve, kapjuk a feladat állítását:

$$\left(a^a b^b c^c\right)^{\frac{1}{a+b+c}} \geq \frac{a+b+c}{3} \geq \frac{ab+bc+ca}{a+b+c} \geq \left(a^b b^c c^a\right)^{\frac{1}{a+b+c}},$$
$$a^a b^b c^c \geq a^b b^c c^a.$$

Egyenlőség az (1) egyenlőtlenségben – és ennek megfelelően a feladat állításában is – akkor és csak akkor van, ha $a=b=c$.

Megjegyzés. Többen a rendezési tétel felhasználása nélkül esetekre bontották a vizsgálatot a, b, c nagysági sorrendje szerint. Ezzel kapcsolatos jellemző hiba volt, hogy szimmetrikusnak ítélték az egyenlőtlenséget a változókban, s emiatt csak az esetek felére bizonyították az állítást.