Megoldás. A feladat állítása szerint léteznek olyan y és z egész számok, amelyekre $a\mid p(y)$ és $b\mid p(z)$. Írjuk föl az a és b számokat prímtényezős alakban:

$$a=p_1^{k_1}p_2^{k_2}\dots p_t^{k_t}q_1^{M_1}q_2^{M_2}\dots q_r^{M_r},\quad b=p_1^{K_1}p_2^{K_2}\dots p_t^{K_t}q_1^{m_1}q_2^{m_2}\dots q_r^{m_r}.$$

Az egységes jelölés érdekében megengedjük, hogy a szereplő prímek kitevője nulla is lehessen, és a prímeket aszerint csoportosítjuk, hogy melyik számban szerepelnek nagyobb kitevővel – vagyis $k_i\le K_i$ és $m_j\le M_j$ (minden i-re és j-re). Ekkor az

$$a_1=q_1^{M_1}q_2^{M_2}\dots q_r^{M_r}\quad \text{és}\quad b_1=p_1^{K_1}p_2^{K_2}\dots p_t^{K_t}$$

számok egymáshoz relatív prímek, és a legkisebb közös többszörösük

$$a_1b_1=q_1^{M_1}q_2^{M_2}\dots q_r^{M_r}p_1^{K_1}p_2^{K_2}\dots p_t^{K_t},$$

ami megegyezik a és b legkisebb közös többszörösével. A korábbi feltételek miatt nyilván $a_1\mid p(y)$ és $b_1\mid p(z)$.

Mivel a_1 és b_1 relatív prímek, a kínai maradéktétel szerint létezik olyan x egész, amelyre

$$x\equiv y\pmod{a_1}$$

és $x\equiv z\pmod{b_1}$.

Az $x\equiv y\pmod{a_1}$ miatt $p(x)\equiv p(y)\pmod{a_1}$, hiszen p egész együtthatós, és a kongruenciákat beszorozhatjuk egész számmal, hatványozhatjuk és össze is adhatjuk.

Hasonlóan, a második feltételből következik, hogy $p(x)\equiv p(z)\pmod{b_1}$. Így $p(x)$ a_1-gyel és b_1-gyel is osztható, tehát osztható a_1 és b_1 legkisebb közös többszörösével is, ami pedig egyenlő a és b legkisebb közös többszörösével.

Weisz Gellért (Fazekas M. Főv. Gyak. G. 10. évf.)
dolgozata alapján