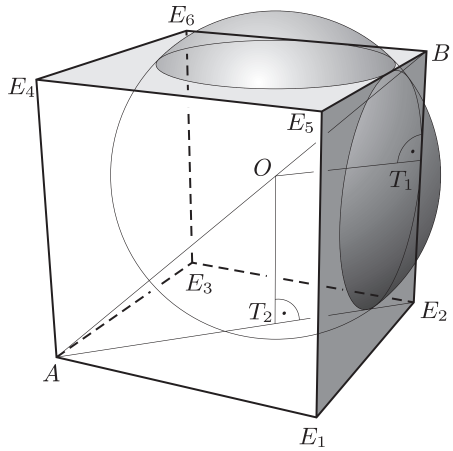
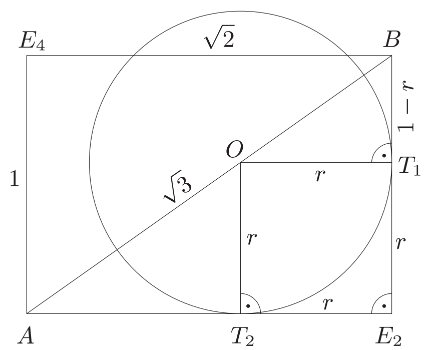
Megoldás. Legyen a keresett sugár r. A gömb a kocka A-n átmenő lapjait érinti, ezért O középpontja a kocka belsejében, e lapoktól egyenlő távolságra van. Ezeknek a feltételeknek a kocka AB testátlóján lévő pontok tesznek eleget, tehát O rajta van a testátlón. Jelöljük a kocka többi csúcsát az *1. ábrán* látható módon. A gömböt érintő egyenesek merőlegesek az érintési pontba húzott sugárra, ezért ha a BE_2 élen lévő érintési pont T_1, akkor $OT_1 = r$ és $OT_1 \perp BE_2$.



1. ábra



2. ábra

Ha a gömbnek az $AE_1E_2E_3$ lapon lévő érintési pontját T_2-vel jelöljük, akkor OT_2 merőleges a lap síkjára, ezért T_2 rajta van az AB testátlónak a lapon lévő merőleges vetületén, az AE_2 lapátlón.

Tekintsük az AE_2BE_4 síkmetszetet (*2. ábra*). Az $OT_2E_2T_1$ négyszögben a T_1, T_2 és E_2 csúcsoknál derékszög van, továbbá két szomszédos oldala egyenlő hosszú ($OT_1 = r = OT_2$), ezért a négyszög négyzet, tehát $T_1E_2 = T_2E_2 = r$. Ebből, felhasználva hogy $AE_2 = \sqrt{2}$, kapjuk, hogy $AT_2 = \sqrt{2} - r$ és $BT_1 = 1 - r$. Az AT_2O és az OT_1B háromszögek hasonlóak, mert megfelelő oldalaik párhuzamosak. Ezért ezen oldalaik aránya egyenlő, tehát

$$\frac{AT_2}{OT_2} = \frac{OT_1}{BT_1}, \quad \text{azaz} \quad \frac{\sqrt{2}-r}{r} = \frac{r}{1-r}.$$

Ebből közös nevezőre hozva és rendezve kapjuk, hogy $\sqrt{2} - r\left(1+\sqrt{2}\right) = 0$, vagyis a keresett sugár:

$$r = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right) = 2 - \sqrt{2}.$$