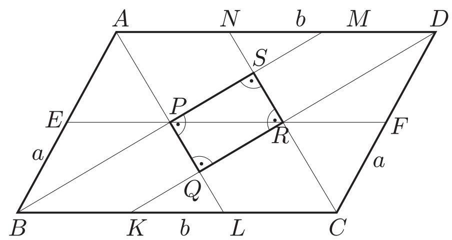
Megoldás. Jelöljük a paralelogramma csúcsait A, B, C, D-vel – úgy választva a betűzést, hogy $AB = CD = a$ és $AD = BC = b$ teljesüljön. A szomszédos szögfelezők metszéspontjai legyenek P, Q, R és S, a szögfelezőknek a paralelogramma határával való, a csúcsoktól különböző metszéspontjai pedig K, L, M és N. Az $a < b < 2a$ feltételből következik, hogy a pontok sorrendje az *ábrán* láthatónak megfelelő.

Mivel a paralelogramma szomszédos szögeinek összege $180°$, a szomszédos csúcsokból induló szögfelezők merőlegesek egymásra. Tehát a $PQRS$ négyszög téglalap. mert minden szöge derékszög. A BM és AL szögfelezők merőlegességéből az is következik, hogy az ABL háromszög egyenlő szárú, $a = AB = BL$.



Ugyanígy kapjuk, hogy a CDN háromszög is egyenlő szárú. Ezért a P és R pontok rajta vannak az AD és BC egyenesek középpárhuzamosán, s ugyanígy láthatjuk be azt is, hogy a QS egyenes pedig AB és CD középpárhuzamosa. Ha a PR egyenesnek a paralelogramma másik két oldalával való metszéspontját az *ábra* szerint E és F jelöli, akkor EP az ABL, RF pedig a CDN háromszög középvonala. Vagyis

$$EP = \frac{BL}{2} = \frac{a}{2} = \frac{ND}{2} = RF,$$

amiből kapjuk, hogy a $PQRS$ téglalap átlóinak hossza

$$PR = EF - (EP + RF) = b - a.$$

A $PQRS$ átlói által bezárt szög megegyezik a paralelogramma $ABC\sphericalangle = \alpha$ szögével, ezért az ismert területképletek alapján a paralelogramma, illetve a téglalap területe:

$$T_{ABCD} = AB \cdot BC \cdot \sin\alpha = ab\sin\alpha,$$

illetve

$$T_{PQRS} = \frac{PR \cdot QS \cdot \sin\alpha}{2} = \frac{(b-a)^2 \sin\alpha}{2}.$$

A paralelogramma egységnyi területű, ezért a keresett terület

$$T_{PQRS} = \frac{T_{PQRS}}{T_{ABCD}} = \frac{(b-a)^2}{2ab}.$$