I. megoldás. Az A, B, C pontokat az e egyenesre merőlegesen vetítve, a kapott pontokat jelölje rendre A_1, B_1, C_1. Pithagorasz tétele szerint

$$PA^2+2PB^2+3PC^2=\left(PA_1^2+2PB_1^2+3PC_1^2\right)+\left(AA_1^2+2BB_1^2+3CC_1^2\right).$$

Az e egyenest a számegyenessel azonosítva, az A_1, B_1, C_1 pontok koordinátája legyen rendre a, b, c, az ismeretlen P pont koordinátája pedig x. Mivel $AA_1^2+2BB_1^2+3CC_1^2$ állandó, a szóban forgó összeg akkor a legkisebb, amikor

$$PA_1^2+2PB_1^2+3PC_1^2=(x-a)^2+2(x-b)^2+3(x-c)^2$$

értéke a lehető legkisebb. Ezt az x-ben másodfokú kifejezést teljes négyzetté kiegészítve

$$6\left(x-\frac{a+2b+3c}{6}\right)^2+\left(a^2+2b^2+3c^2\right)-\frac{(a+2b+3c)^2}{6}$$

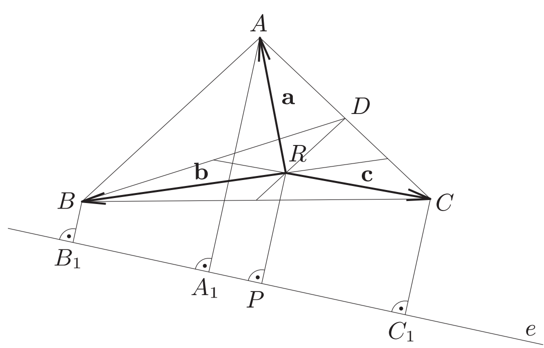
adódik. Ez nyilván akkor a legkisebb, ha

$$x=\frac{a+2b+3c}{6}=\frac{\frac{a+c}{2}+b+c}{3}.$$

Ekkor a P pont éppen a BCD háromszög súlypontjának az e egyenesre eső merőleges vetülete, ahol D az AC szakasz felezőpontját jelöli.

II. megoldás. Legyen R olyan pont, melyből induló $\overrightarrow{RA}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{RB}=\mathbf{b}$ és $\overrightarrow{RC}=\mathbf{c}$ vektorokra teljesül az $\mathbf{a}+2\mathbf{b}+3\mathbf{c}=\mathbf{0}$ összefüggés, továbbá legyen $\overrightarrow{RP}=\mathbf{p}$. Azt, hogy ilyen R pont létezik, később bizonyítjuk. Ekkor

$$\begin{aligned}PA^2+2PB^2+3PC^2&=(\mathbf{a}-\mathbf{p})^2+2(\mathbf{b}-\mathbf{p})^2+3(\mathbf{c}-\mathbf{p})^2=\\&=\left(\mathbf{a}^2+2\mathbf{b}^2+3\mathbf{c}^2\right)+6\mathbf{p}^2-2\mathbf{p}(\mathbf{a}+2\mathbf{b}+3\mathbf{c})=\left(\mathbf{a}^2+2\mathbf{b}^2+3\mathbf{c}^2\right)+6\mathbf{p}^2.\end{aligned}$$



Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ rögzített vektorok, ezért a kifejezés értéke akkor a legkisebb, ha $\mathbf{p}^2$ értéke a lehető legkisebb. Ez akkor következik be, amikor az RP szakasz hossza minimális, azaz a keresett pont éppen R-nek az e egyenesen lévő merőleges vetülete.

Meg kell még határoznunk az $\mathbf{a}+2\mathbf{b}+3\mathbf{c}=\mathbf{0}$ összefüggésnek eleget tevő R pontokat. Megmutatjuk, hogy pontosan egy ilyen tulajdonságú pont van, s ez annak a BCD háromszögnek a súlypontja, melynek D csúcsa az AC szakasz felezőpontja.

Ha ugyanis $\overrightarrow{RD}=\mathbf{d}$, akkor a súlypont tulajdonságaiból következően $\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}=\mathbf{0}$, D felezőpont volta miatt pedig $\mathbf{d}=(\mathbf{a}+\mathbf{c})/2$, vagyis

$$\mathbf{0}=\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}=\mathbf{b}+\mathbf{c}+\frac{\mathbf{a}+\mathbf{c}}{2}=\frac{\mathbf{a}+2\mathbf{b}+3\mathbf{c}}{2}.$$

Tehát ez a pont eleget tesz a követelménynek.

Ha valamely T pontra teljesül, hogy $\overrightarrow{TA}+2\overrightarrow{TB}+3\overrightarrow{TC}=\mathbf{0}$, akkor

$$\begin{aligned}\mathbf{0}&=\overrightarrow{TA}+2\overrightarrow{TB}+3\overrightarrow{TC}=\left(\overrightarrow{TR}+\overrightarrow{RA}\right)+2\left(\overrightarrow{TR}+\overrightarrow{RB}\right)+3\left(\overrightarrow{TR}+\overrightarrow{RC}\right)=\\&=6\overrightarrow{TR}+\mathbf{a}+2\mathbf{b}+3\mathbf{c}=6\overrightarrow{TR},\end{aligned}$$

tehát $\overrightarrow{TR}=\mathbf{0}$, azaz T egybeesik R-rel.

Megjegyzés. Ha adott egy ABC háromszög, valamint az α, β, γ valós számok, melyekre $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$ teljesül, akkor megmutatható, hogy pontosan egy olyan P pont van, melyre fennáll az $\alpha\overrightarrow{PA}+\beta\overrightarrow{PB}+\gamma\overrightarrow{PC}=\mathbf{0}$ összefüggés, másrészt pedig a háromszög síkjának bármely pontjához létezik olyan (α,β,γ) skalárszorzó erejéig egyértelmű, rendezett számhármas, melyre teljesül az összefüggés. Az érdeklődő olvasó ennek részletes leírását megtalálja például *Hajós Gy.: Bevezetés a geometriába* című könyvében a *baricentrikus koordinátákról* szóló 35.5. részben.