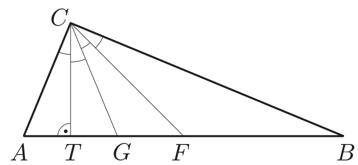
Megoldás. Tegyük fel, hogy az ABC háromszög C csúcsánál lévő szögét négy egyenlő részre osztja a CT magasságvonal, a CF súlyvonal és a CG szögfelező. Jelöljük a háromszög oldalait és szögeit a szokásos módon a, b, c, illetve α, β, γ-val. Ha $a=b$, akkor a T, F és G pontok egybeesnek. Tehát $a \neq b$. Az oldalak szimmetrikus szerepe miatt feltehetjük, hogy $a > b$ teljesül. Mivel T az AB oldal belső pontja, $\alpha < 90^\circ$ és $\beta < 90^\circ$ is teljesül, továbbá $a > b$ miatt $\alpha > \beta$, amiből viszont $ACT\sphericalangle = 90^\circ - \alpha < 90^\circ - \beta = BCT\sphericalangle$ következik.



Ezért az ABC háromszög C csúcsához tartozó szögfelező a BCT szögtartományban halad, tehát T az AG szakasz belső pontja. A szögfelezőtétel következménye szerint $AG = \dfrac{bc}{a+b} < \dfrac{c}{2}$, ezért G az AF szakasz belső pontja. Vagyis az A, T, G, F, B pontok ebben a sorrendben követik egymást.

A hasonlóságok nem változtatják meg a szögeket, ezért feltehetjük, hogy $CT=1$, továbbá az egyszerűség kedvéért vezessük be a $\delta = \gamma/4$ jelölést.

Ekkor $ACT\sphericalangle = TCG\sphericalangle = GCF\sphericalangle = FCB\sphericalangle = \delta$, ezért $AT = TG = \operatorname{tg}\delta$, $TF = \operatorname{tg} 2\delta$ és $TB = \operatorname{tg} 3\delta$, vagyis

$$\operatorname{tg}\delta + \operatorname{tg} 2\delta = AT + TF = AF = FB = TB - TF = \operatorname{tg} 3\delta - \operatorname{tg} 2\delta.$$

Vezessük be a $z = \operatorname{tg}\delta$ jelölést és alkalmazzuk a tangens függvény addíciós képletét, mely szerint:

$$\operatorname{tg} 2\delta = \frac{2\operatorname{tg}\delta}{1-\operatorname{tg}^2\delta} = \frac{2z}{1-z^2} \quad \text{és} \quad \operatorname{tg} 3\delta = \frac{\operatorname{tg}\delta + \operatorname{tg} 2\delta}{1-\operatorname{tg}\delta\operatorname{tg} 2\delta} = \frac{3z-z^3}{1-3z^2},$$

a következő egyenletet kapjuk:

$$z + \frac{4z}{1-z^2} = \frac{3z-z^3}{1-3z^2}.$$

Hozzunk közös nevezőre:

$$\left(5z-z^3\right)\left(1-3z^2\right) = \left(3z-z^3\right)\left(1-z^2\right)$$

egyenlet adódik, amit $z \neq 0$-val osztva majd rendezve a $z^4 - 6z^2 + 1 = 0$ egyenletet kapjuk, ami z^2-re nézve másodfokú. Ennek megoldásai a megoldóképlet alapján, valamint a $3 \pm \sqrt{8} = \left(\sqrt{2} \pm 1\right)^2$ összefüggést felhasználva:

$$z = \pm\left(\sqrt{2} \pm 1\right).$$

Mivel $0^\circ < \delta < 45^\circ$, csak a $0 < z < 1$ egyenlőtlenségeknek eleget tevő $z = \sqrt{2}-1$ megoldás adhat megfelelő háromszöget. Ebből kapjuk, hogy

$$\delta = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}-1\right) = 22{,}5^\circ.$$

Mivel $\gamma = 4\delta$, azért a háromszög derékszögű. Bármely derékszögű háromszögben a derékszögű csúcshoz tartozó magasságvonalnak a befogókkal bezárt szögei megegyeznek a háromszög hegyesszögeivel, tehát csak olyan derékszögű háromszög tehet eleget a feladat feltételeinek, melynek egyik hegyesszöge $22{,}5^\circ$.

Ha az ABC háromszögben ez teljesül, akkor

$$AGC\sphericalangle = 180^\circ - (CAG\sphericalangle + ACG\sphericalangle) = 180^\circ - (67{,}5^\circ + 45^\circ) = 67{,}5^\circ = CAG\sphericalangle,$$

tehát az AGC háromszög egyenlő szárú, azaz CT felezi az ACG szöget, s ezért negyedeli az ACB szöget. Mivel a derékszögű háromszög köré írható kör középpontja az átfogó felezőpontja, az FBC háromszög is egyenlő szárú, tehát $FCB\sphericalangle = FBC\sphericalangle = 22{,}5^\circ = \dfrac{90^\circ}{4}$, vagyis a C-hez tartozó súlyvonal is negyedeli az ott lévő szöget.

Tehát a feladat feltételeinek pontosan azok a derékszögű háromszögek tesznek eleget, amelyeknek egyik hegyesszöge $22{,}5^\circ$.