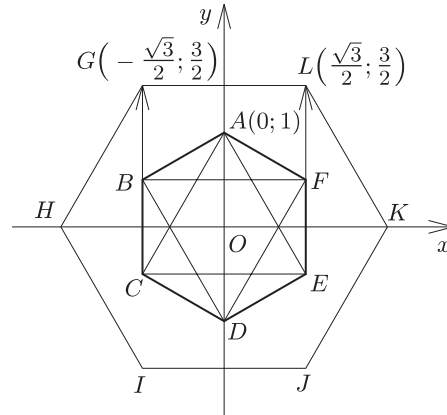
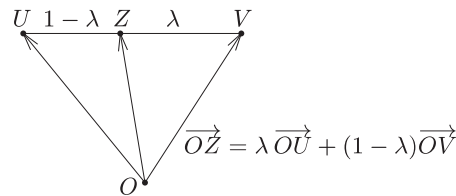


Megoldás. Jelölje a keresett ponthalmazt \mathcal{H} . A BF szakaszt az \overrightarrow{OA} vektorral eltolva a GL szakaszt kapjuk, ahol $G(-\sqrt{3}/2; 3/2)$ és $L(\sqrt{3}/2; 3/2)$. Tehát a GL szakasz pontjai a \mathcal{H} halmazhoz tartoznak. Szimmetriaokok miatt ugyanígy kapjuk, hogy az O középpontú $GHIJKL$ szabályos hatszög kerületének minden pontja \mathcal{H} -hoz tartozik, ahol $H(-\sqrt{3}; 0)$, $I(-\sqrt{3}/2; -3/2)$, $J(\sqrt{3}/2; -3/2)$ és $K(\sqrt{3}; 0)$.



1. ábra



2. ábra

Valamely \mathcal{K} ponthalmaz pontosan akkor konvex, ha bármely két pontjának összekötő szakaszát is tartalmazza. Ezt vektorok segítségével könnyen leírhatjuk: ha $U, V \in \mathcal{K}$, $0 \leq \lambda \leq 1$ tetszőleges valós szám és $\overrightarrow{OZ} = \lambda \overrightarrow{OU} + (1 - \lambda) \overrightarrow{OV}$, akkor $Z \in \mathcal{K}$. Ezt felhasználva egyszerűen beláthatjuk, hogy a \mathcal{H} halmaz konvex. Ha $P, Q \in \mathcal{H}$, akkor alkalmas $P_i, Q_i \in \mathcal{H}_i$ pontokkal

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} \quad \text{és} \quad \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OQ_1} + \overrightarrow{OQ_2}$$

teljesül. Ezért minden $0 \leq \lambda \leq 1$ szám esetén a \mathcal{H}_i halmazok konvex volta miatt

$$\lambda \overrightarrow{OP} + (1 - \lambda) \overrightarrow{OQ} = (\lambda \overrightarrow{OP_1} + (1 - \lambda) \overrightarrow{OQ_1}) + (\lambda \overrightarrow{OP_2} + (1 - \lambda) \overrightarrow{OQ_2}) \in \mathcal{H}.$$

Tehát \mathcal{H} tartalmazza a $GHIJKL$ hatszöglemez minden pontját.

Megmutatjuk, hogy más pontot viszont nem tartalmaz. Mivel \mathcal{H}_1 , illetve \mathcal{H}_2 minden pontjának második koordinátája legfeljebb 1, illetve 1/2, \mathcal{H} minden pontjának második koordinátája legfeljebb 3/2. Tehát \mathcal{H} egyetlen pontja sincs a GL egyenes fölött. Szimmetriaokokból ugyanígy kapjuk, hogy a $GHIJKL$ hatszög bármely oldalegyenesének az origót tartalmazó oldalára esik \mathcal{H} minden pontja.

Tehát a keresett pontok halmaza megegyezik a $GHIJKL$ szabályos hatszöglemezzel.