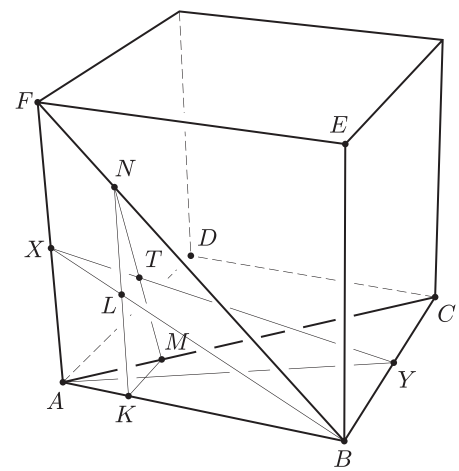
I. megoldás. Legyen az MN szakasz felezőpontja T. Ha $M = A$, s ezért $N = F$, akkor T az AF él X felezőpontja, ha pedig $M = C$, s ezért $N = B$, akkor T a BC él Y felezőpontja. Megmutatjuk, hogy a keresett mértani hely az XY szakasz.



1. ábra

Mivel $AM = FN$ és az AC, valamint FB lapátló egyenesek a kocka ADF oldallapjának S síkjával ugyanakkora szöget zárnak be, az S síktól az M és N pontok egyenlő távolságra vannak. Legyen az M-en és N-en átmenő, S-sel párhuzamos T sík és az AB egyenes döféspontja K. Ekkor KN párhuzamos AF-fel, tehát a BKN és BAF háromszögek középpontosan hasonlóak. Ezért a KN szakasz L felezőpontja rajta van a BX egyenesen.

A KMN háromszögben LT középvonal, ezért párhuzamos KM-mel, s így az Y-t tartalmazó BC-vel is. Ez viszont azt jelenti, hogy ha az XBY háromszöget X-ből középpontosan kicsinyítjük olyan arányban, hogy B képe L legyen, akkor Y képe T lesz, tehát T rajta van az XY szakaszon.

Megfordítva, ha T az XY szakasz tetszőleges belső pontja, akkor legyen a T-n átmenő S-sel párhuzamos síknak az AB, XB, AC és FB szakaszokkal való metszéspontja rendre a K, L, M és N. Ekkor a párhuzamos szelők tételéből következik, hogy LT középvonal a KMN háromszögben, tehát T az MN szakasz felezőpontja. Másrészt ugyancsak a szelőtétel szerint

$$AM : AC = AK : AB = FN : FB,$$

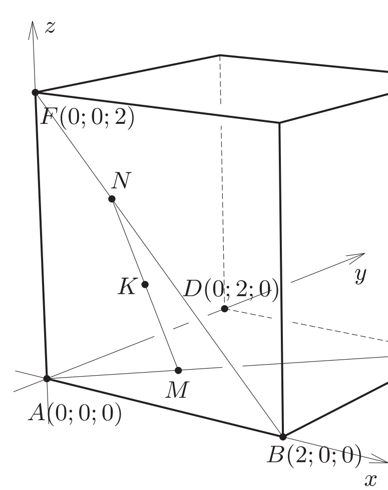
vagyis $AC = FB$ miatt $AM = FN$.

Tehát T előáll valamely megfelelő szakasz felezőpontjaként.

II. megoldás. Vegyünk fel egy koordinátarendszert úgy, hogy az A pont legyen az origó, a B, D és F pontok rendre az x-, y- és z-tengely pozitív felére essenek, az egységet pedig úgy válasszuk, hogy e három pont esetén a 0-tól különböző koordináta 2 legyen (*2. ábra*).

Ekkor $C(2; 2; 0)$, az AC szakaszon lévő M pont koordinátái $(2a; 2a; 0)$ valamely $0 \le a \le 1$ valós számra, s az AM szakasz hossza $2\sqrt{2}a$. Mivel a BF szakaszon lévő pontok koordinátái $t \cdot (2; 0; 0) + (1 - t) \cdot (0; 0; 2) = (2t; 0; 2 - 2t)$ alakúak, ahol $0 \le t \le 1$, azért ha az N ponthoz a t paraméterérték tartozik, akkor az FN szakasz hossza

$$\sqrt{(2t-0)^2 + \big((2-2t)-2\big)^2} = 2\sqrt{2}t.$$



2. ábra

Az $AM=FN$ feltételből tehát az következik, hogy $a=t$, vagyis N koordinátái $(2a;0;2-2a)$. Tehát az MN szakasz K felezőpontjának koordinátái $(2a;a;1-a)$.

Mivel a tetszőleges 0 és 1 közti értéket felvehet, a keresett mértani hely megegyezik a

$$\mathcal{K}=\big\{(2a;a;1-a)\colon 0\le a\le 1\big\}$$

ponthalmazzal. Az $X=2a$, $Y=a$, $Z=1-a$ feltételekből azt kapjuk, hogy $\mathcal{K}$ része az $X/2=Y=-Z+1$ egyenletrendszerű egyenesnek. S mivel a minden 0 és 1 közti értéket felvesz, azért $\mathcal{K}$ éppen az ezen az egyenesen lévő $(0;0;1)$ és $(2;1;0)$ pontok összekötő szakasza. E két pont a kocka AF, illetve BC élének felezőpontja, tehát a keresett mértani hely e két élfelezőpont összekötő szakasza.

III. megoldás. A tér tetszőleges P pontjának helyvektorát jelölje $\mathbf{p}$. Ekkor az AF él X és a BC él Y felezőpontjának helyvektora $\mathbf{x}=\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{f}}{2}$, illetve $\mathbf{y}=\dfrac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}$. Minthogy $AC=BF$, ha valamely $0\le\lambda\le 1$ esetén M az AC lapátlót $\lambda:(1-\lambda)$ arányban osztó pont, akkor az N pont az FB lapátlót szintén $\lambda:(1-\lambda)$ arányban osztja, és viszont. Ekkor az MN szakasz Z felezőpontjára

$$\mathbf{z}=\frac{\mathbf{m}+\mathbf{n}}{2}=\frac{\big((1-\lambda)\mathbf{a}+\lambda\mathbf{c}\big)+\big((1-\lambda)\mathbf{f}+\lambda\mathbf{b}\big)}{2}=(1-\lambda)\cdot\frac{\mathbf{a}+\mathbf{f}}{2}+\lambda\cdot\frac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2},$$

vagyis $\mathbf{z}=(1-\lambda)\mathbf{x}+\lambda\mathbf{y}$, tehát ekkor Z is $\lambda:(1-\lambda)$ arányban osztja az XY szakaszt. Ezért a keresett mértani hely éppen az XY szakasz.