Megoldás. Az űrhajósok legyenek egy (a közönséges értelemben teljes) gráf csúcsai. A csúcshármasokat színezzük ki két színnel, kékkel és pirossal. Azt kell megmutatni, hogy ha a csúcsok száma legalább 11 000, akkor vagy van 5 olyan csúcs, amelyben bármelyik hármas színe kék, vagy van 4 olyan csúcs, amelyben egyik hármas színe sem kék. Tehát az a kérdés, hogy legfeljebb mennyi $R_3(5,4)$, vagyis a legkisebb olyan $n = R_3(5,4)$ szám, amelyre ha egy n csúcsú gráfban két színnel – kékkel és pirossal – színezzük a hármasokat, akkor vagy van 5 olyan csúcs, amelyek közül bármely hármas kék, vagy van 4 olyan csúcs, amelyben bármely hármas színe piros. Általában az a kérdés, hogy legfeljebb mennyi $R_3(a,b)$ értéke.

Megmutatjuk, hogy
$$R_3(a,b) \leq R_2\big(R_3(a-1,b), R_3(a,b-1)\big) + 1.$$
Legyen $R_2\big(R_3(a-1,b), R_3(a,b-1)\big) + 1 = k$. Tekintsünk egy k csúcsú teljes gráfot, és abban a csúcshármasok halmazának tetszőleges színezését. Vegyünk ki egy csúcsot, az legyen A. A megmaradt $k-1$ csúcsú gráfban a B és C csúcsokat összekötő él színe legyen kék, ha az ABC csúcshármas színe kék, és legyen piros, ha az ABC csúcshármas színe piros. $R_2\big(R_3(a-1,b), R_3(a,b-1)\big)$ azt jelenti, hogy a $k-1$ csúcsú gráfban vagy van $R_3(a-1,b)$ csúcs, amiben bármely él kék, vagy van $R_3(a,b-1)$ csúcs, amiben bármely él piros.

Nézzük először azt az esetet, amikor van $R_3(a-1,b)$ csúcs, amiben bármely él színe kék. Ha van $R_3(a-1,b)$ csúcs, akkor ez azt jelenti, hogy közülük vagy van $a-1$ csúcs úgy, hogy bármely hármas színe kék, vagy van b csúcs úgy, hogy bármely hármas színe piros. Tegyük fel, hogy nem volt $a-1$ csúcs úgy, hogy közülük bármely hármas színe kék. Ekkor volt olyan b csúcs, hogy bármely hármas színe piros, ezért az eredeti gráfban is van b olyan csúcs, hogy bármely hármas színe piros. Ha pedig volt $a-1$ olyan csúcs, hogy bármely hármas színe kék, akkor ezekhez a csúcsokhoz vegyük hozzá A-t. Mivel az $a-1$ csúcs között bármelyik hármas színe kék, és bármely él színe kék, emiatt ha hozzávesszük A-t, akkor az bármelyik pontpárral egy kék hármast alkot, tehát az a csúcs közül bármely hármas színe kék. Ekkor az eredeti gráfban is volt a olyan csúcs, amiben bármely hármas színe kék. Így igaz, hogy az eredeti k csúcsú gráfban vagy van a olyan csúcs, hogy bármely hármas színe kék, vagy van b olyan csúcs, hogy bármely hármas színe piros.

Most nézzük azt ez esetet, amikor nincs $R_3(a-1,b)$ csúcs, amiben bármely él kék. Ekkor van $R_3(a,b-1)$ csúcs, amiben bármely él piros. Ha van $R_3(a,b-1)$ csúcsunk, akkor azok közül vagy van a csúcs úgy, hogy bármely hármas színe kék, vagy van $b-1$ csúcs úgy, hogy bármely hármas színe piros. Ha van a csúcs úgy, hogy bármely hármas színe kék, akkor az eredeti k csúcsú gráfban is van a csúcs, úgy, hogy bármely hármas színe kék. Ha nincs a olyan csúcs, hogy bármely hármas színe kék, akkor van $b-1$ olyan csúcs, hogy bármely hármas színe piros. Ezekhez vegyük hozzá A-t. Mivel a $b-1$ csúcs közül bármely hármas színe piros, és bármely él színe is piros, emiatt az A bármely pontpárral piros hármast alkot. Ekkor az eredeti k csúcsú gráfban van b olyan pont, hogy bármely hármas színe piros. Ekkor is igaz, hogy vagy van a csúcs, hogy bármely hármas színe kék, vagy van b csúcs, hogy bármely hármas színe piros. Tehát valóban
$$R_3(a,b) \leq R_2\big(R_3(a-1,b), R_3(a,b-1)\big) + 1.$$

Ismert tétel, hogy
$$R_2(a,b) \leq \binom{a+b-2}{a-1} + 1.$$
Bebizonyítom, hogy $R_3(a,3) = a$. Ehhez először megmutatom, hogy $R_3(a,3) \geq a$. Ha ugyanis $R_3(a,3)$ kisebb lenne a-nál, akkor ez azt jelentené, hogy $R_3(a,3)$ csúcs esetén mindenképpen van piros színű hármas, ami nyilván nem igaz; így $R_3(a,3) \geq a$. Viszont a csúcs esetén vagy van piros hármas, vagy pedig az a csúcsból képezhető valamennyi hármas kék, tehát $R_3(a,3) \leq a$, ezért valóban $R_3(a,3) = a$.

Mindezeket felhasználva:
$$R_3(5,4) \leq R_2\big(R_3(4,4), R_3(5,3)\big) + 1,$$
és tudjuk, hogy $R_3(5,3) = 5$. Valamint
$$R_3(4,4) \leq R_2\big(R_3(3,4), R_3(4,3)\big) + 1.$$
Mivel $R_3(3,4) = R_3(4,3) = 4$, emiatt
$$R_3(4,4) \leq \binom{4+4-2}{4-1} + 1 = \binom{6}{3} + 1 = 21,$$
így
$$R_3(5,4) \leq R_2(21,5) + 1 \leq \binom{21+5-2}{21-1} + 1 = \binom{24}{4} + 1 = 10\,627,$$
vagyis már 10 627 pontnál is igaz, hogy vagy van 5 olyan pont, ahol bármely hármas kék, vagy van 4 olyan csúcs, hogy bármely hármas színe piros. Tehát elég 11 000 űrhajós ahhoz, hogy a feladat követelményei teljesüljenek.

[0]Legalább $R_2(a,b)$ számú csúcsot tartalmazó teljes gráfban ha két színnel, kékkel és pirossal színezzük az éleket, vagy van a db olyan csúcs, amelyek közül bármely kettő kék, vagy van b db olyan csúcs, amelyek közül bármely kettő piros.

Megjegyzés. A megoldásban felhasznált

$$R_2(a,b) \le \binom{a+b-2}{a-1} + 1$$

összefüggés például az $a+b$ szerinti indukcióval látható be, a binomiális együtthatókra teljesülő

$$\binom{a+b-2}{a-1} = \binom{a+b-3}{a-2} + \binom{a+b-3}{a-1}$$

azonosság segítségével. Az állítás például megtalálható Lovász László: *Kombinatorikai problémák és feladatok* c. könyvében (az állítás a 101. oldalon levő 1.(a) feladatban, a megoldás pedig az 577. oldalon olvasható.)