

Megoldás. A feladat értelmezési tartománya: $x > 0$. Áttérve 2009-es alapra:

$$\frac{\log_{2009}(2009x)}{\log_{2009}2010} = \log_{2009}(2010x).$$

Szorozhatunk a nem 0 nevezővel:

$$\log_{2009}(2009x) = \log_{2009}2010 \cdot \log_{2009}(2010x).$$

Alkalmazzuk a szorzat logaritmusára ismert összefüggést:

$$\log_{2009}2009 + \log_{2009}x = \log_{2009}2010 \cdot (\log_{2009}2010 + \log_{2009}x),$$

$$1 + \log_{2009}x = \log_{2009}^2 2010 + \log_{2009}2010 \cdot \log_{2009}x,$$

$$\log_{2009}x = -\frac{\log_{2009}^2 2010 - 1}{\log_{2009}2010 - 1},$$

$$\log_{2009}x = -\log_{2009}2010 - 1,$$

$$\log_{2009}x = \log_{2009}2010^{-1} - \log_{2009}2009,$$

$$\log_{2009}x = \log_{2009}\frac{1}{2009 \cdot 2010}.$$

A $\log_{2009}x$ függvény szigorú monotonitása miatt ez akkor és csak akkor teljesül, ha

$$x = \frac{1}{2009 \cdot 2010},$$

ami eleget tesz a kikötésnek. (Ellenőrzéssel látható, hogy jól számoltunk.)