Megoldás. Nézzünk néhány elemet a sorozat elejéről, ha a kezdő elem 0:

$$a_1' = 0, \quad a_2' = 1, \quad a_3' = 7, \quad a_4' = 85 = 5 \cdot 17, \quad a_5' = 7651 = 7 \cdot 1093,$$

$$a_6' = 58\,537\,801 + 38\,255 + 1 = 58\,576\,057,$$

$$a_7' = 3\,431\,154\,453\,667\,249 + 292\,880\,285 + 1 = 3\,431\,154\,746\,547\,535 = \\ = 5\,766\,646\,632\,853 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 17.$$

Az utolsó számnál az 5 766 646 632 853 nem osztható az 5, 7, 17, 1093 egyikével sem, így van még ezeken kívül legalább egy prímosztója.

Mivel – a rekurzió miatt – a sorozat bármely elemének egy adott számmal való osztási maradéka kizárólag az őt közvetlenül megelőző elem osztási maradékától függ láthatjuk, hogy ha egy ilyen sorozat k-adik eleme, a_k osztható 7-tel, akkor a $k + 2t$-edik elemek mindegyike osztható 7-tel, hiszen ekkor az a_k szám 7-es maradéka megegyezik a fenti $a_1' = 0$ kezdőelem 7-es maradékával, így az a_{k+2} 7-es maradéka megegyezik a fenti $a_3' = 7$ maradékával stb. Hasonló állítás érvényes 7 helyett bármilyen számra, például az 5-nél és a 17-nél minden harmadik tag adja ugyanazt a maradékot, az $M = 5\,766\,646\,632\,853$ pedig minden hatodik lépésben jelenik meg.

Az eddigi észrevételek alapján olyan sorozatot készítünk, amelynek mindegyik eleme (valódi módon) osztható az 5, 7, 17, M számok valamelyikével. Megfigyeléseink szerint elegendő, ha ez a sorozat első hat tagjára teljesül (a valódi oszthatóságot az biztosítja a továbbiakban is, hogy a sorozat szigorúan monoton nő). Ehhez a kezdőtagot kell alkalmasan megválasztani. Tekintsük a következő táblázatot:

5 és 7	17	M
1	7	$\boxed{0}$
$\boxed{7}$	$5 \cdot \boxed{17}$	1
$\boxed{5} \cdot 17$	$7 \cdot 1093$	7
$\boxed{7} \cdot 1093$	58 576 057	$5 \cdot 17$
58 576 057	$5 \cdot 7 \cdot \boxed{17} \cdot M$	$7 \cdot 1093$
$\boxed{5} \cdot \boxed{7} \cdot 17 \cdot M$	...	58 576 057
...	...	$5 \cdot 7 \cdot 17 \cdot \boxed{M}$

Táblázatunk szerint, ha a sorozat kezdőtagja 5-tel és 7-tel osztva 1-et, 17-tel osztva 7-et ad maradékul és osztható M-mel, akkor az 1., 2., 3., 4., 5., 6. tag rendre osztható lesz M-mel, $7 \cdot 17$-tel, 5-tel, 7-tel, 17-tel, $5 \cdot 7$-tel.

Tehát elegendő, ha a sorozat első eleme olyan A pozitív egész, amely 5-tel és 7-tel osztva 1-et, 17-tel osztva 7-et ad maradékul és osztható $2M$-mel. Az 5, 7, 17 és $2M$ számok páronként relatív prímek, ezért a *kínai maradéktétel* szerint létezik ilyen A. Nyilván ($2M \mid A$ miatt) az A összetett szám, a sorozat többi eleme pedig azért összetett, mert osztható az említett számokkal, és nagyobb A-nál.

Megjegyzés. A kínai maradéktétel a következőt állítja: ha az m_1, m_2, ..., m_k egészek páronként relatív prímek, és c_1, c_2, ..., c_k tetszőleges egész számok, akkor létezik olyan (pozitív) egész szám, amelynek m_i-vel való osztási maradéka megegyezik a c_i osztási maradékával (minden $1 \leq i \leq k$-ra).