Megjegyzés. Tegyük föl, hogy létezik ilyen $2 \le n$-edfokú f polinom. Elsőként azt igazoljuk, hogy a polinom minden együtthatója racionális szám (az f feltételezett tulajdonságából itt csupán arra lesz szükség, hogy a polinom minden racionális helyen racionális értéket vesz föl). Ehhez egyrészt megmutatjuk, hogy egy legfeljebb n-edfokú polinomot egyértelműen meghatároz $n+1$ különböző helyen fölvett értéke. Valóban, ha f_1 és f_2 foka legfeljebb n, és például $f_1(1)=f_2(1)$, $f_1(2)=f_2(2)$, $\ldots$, $f_1(n+1)=f_2(n+1)$, akkor az ugyancsak legfeljebb n-edfokú f_1-f_2 polinomnak létezik legalább $n+1$ különböző gyöke: $1,2,\ldots,n+1$. Ez csak úgy lehetséges, hogy f_1-f_2 a nullapolinom, vagyis $f_1=f_2$.

Tekintsük másrészt (minden $1 \le j \le n+1$-re) az n-edfokú

$$\ell_j=\frac{(x-1)(x-2)\ldots\big(x-(j-1)\big)\big(x-(j+1)\big)\ldots\big(x-(n+1)\big)}{(j-1)(j-2)\ldots\big(j-(j-1)\big)\big(j-(j+1)\big)\ldots\big(j-(n+1)\big)}$$

polinomokat. Ezek együtthatói racionális számok, és minden $1 \le k \le n+1$-re

$$\ell_j(k)=\begin{cases}1, & \text{ha } k=j,\\ 0, & \text{ha } k\ne j.\end{cases}$$

Ebből könnyen látható, hogy az ugyancsak racionális együtthatós és legfeljebb n-edfokú $f^*=f(1)\ell_1+f(2)\ell_2+\ldots+f(n+1)\ell_{n+1}$ polinom az $1,2,\ldots,n+1$ helyeken rendre ugyanazokat az értékeket veszi föl, mint f, ezért a fentiek értelmében $f^*=f$.

Másodjára azt mutatjuk meg, hogy ha létezik a feladat követelményeit kielégítő polinom, akkor olyan polinom is található erre a célra, amelynek együtthatói egész számok. Jelölje ugyanis t az előbbi f polinom együtthatóiban a nevezők legkisebb közös többszörösét, ekkor f helyett tf ugyanúgy megfelelő, és egészek az együtthatói.

I. megoldás. Ha f egy megfelelő, egész együtthatós polinom, akkor $f+c$ is megfelelő, bármilyen c racionális szám választása mellett. Ennek alapján feltehetjük, hogy
$f=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x$
olyan, a feladat feltételeit kielégítő, egész együtthatós polinom, amelynek a konstans tagja nulla. Mivel a racionális helyeken f minden racionális értéket felvesz, speciálisan minden p prímhez létezik olyan $\dfrac{s_p}{t_p}$ – egyszerűsített törtként felírt – racionális szám, amelyre $f\left(\dfrac{s_p}{t_p}\right)=p$. Itt mindkét oldalt t_p^n-nel megszorozva, majd rendezve:

$$a_ns_p^n+a_{n-1}s_p^{n-1}t_p+\ldots+a_1s_pt_p^{n-1}=pt_p^n.$$

A bal oldalon minden tag osztható s_p-vel, ezért s_p osztója pt_p^n-nek is; azonban (a tört egyszerűsített alakja miatt) s_p relatív prím t_p-hez, így t_p^n-hez is, következésképpen s_p osztója p-nek.

Hasonlóan kapjuk, az iménti egyenlőség

$$-a_ns_p^n=a_{n-1}s_p^{n-1}t_p+\ldots+a_1s_pt_p^{n-1}-pt_p^n$$

alakba történő átrendezésével, hogy $a_ns_p^n$ osztható t_p-vel, ezért a_n is osztható t_p-vel. Mindez azt jelenti, hogy

$$\frac{s_p}{t_p}=\frac{p}{v_p}\quad\text{vagy}\quad\frac{s_p}{t_p}=\frac{1}{v_p},$$

ahol v_p az a_n főegyüttható valamelyik (pozitív vagy negatív) osztója. Az ilyen $\dfrac{1}{v_p}$ számok csak véges sokan vannak, a p prímek száma viszont végtelen, ezért végtelen sok p prímre az első eset következik be: $f\left(\dfrac{p}{v_p}\right)=p$, azaz (felhasználva, hogy $f=x\cdot g$, alkalmas g polinommal)

$$\frac{p}{v_p}\cdot g\left(\frac{p}{v_p}\right)=p.$$

Innen $g\left(\dfrac{p}{v_p}\right)=v_p$, végtelen sok p prímre. Mint láttuk, itt $\dfrac{p}{v_p}$ végtelen sok, v_p pedig véges sok számot jelent, így van olyan racionális (v_p) érték, amelyet g végtelen sokszor felvesz. Ebből következik, hogy g konstans polinom, akkor viszont $f=x\cdot g$ elsőfokú, ami ellentmondás. Tehát nem létezik a feladat követelményeit kielégítő polinom.

II. megoldás. A feladat feltétele és az elöljáróban bizonyítottak szerint van olyan legalább másodfokú, egész együtthatós f polinom, hogy az $f(x)=a$ egyenletnek minden a racionális számra van racionális megoldása – vagyis a $h=f-a$ polinomnak minden a racionális számra van racionális gyöke. Legyen $a=1/p$, ahol p olyan prímszám, amivel az f polinom a_n főegyütthatója nem osztható. Tekintsük a $ph=pf-1$ egész együtthatós polinomot, ennek tehát létezik racionális gyöke. Ugyanakkor itt a konstans tag nem osztható p-vel, a többi együttható viszont osztható vele, a pa_n főegyüttható pedig nem osztható p^2-tel (hiszen a_n nem osztható p-vel); vagyis erre a polinomra teljesül a *Schönemann–Eisenstein-kritérium* „fordított” változata. Az erről szóló nevezetes tétel szerint ph (és ezzel ekvivalens módon h) nem bontható fel két racionális együtthatós, nem konstans polinom szorzatára. Ez viszont ellentmond annak, hogy a polinomnak van racionális gyöke – $h(r)=0$ ugyanis éppen azt jelenti, hogy $x-r$ kiemelhető h-ból. Mivel pedig

f, és így h is legalább másodfokú, a $h = (x - r) \cdot g$ felbontásban egyik tényező sem konstans. A kapott ellentmondás szerint nem létezik a keresett polinom.

III. megoldás. Legyen ismét $f = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ egy keresett, egész együtthatós polinom; nyilván feltehető, hogy a főegyütthatója, a_n pozitív. Ekkor f végtelenben vett határértéke $+\infty$, a $-\infty$-ben pedig $-\infty$, hiszen egyébként alulról korlátos lenne, és úgy nem vehetne föl minden racionális értéket. Így létezik olyan (pozitív) c korlát, hogy $(c, +\infty)$-en az f függvény szigorúan monoton nő, és minden $a < c$-re $f(c) > f(a)$. Ezekből következik, hogy ha $c < m < k$, akkor $f(m)$ és $f(k)$ közötti értékeket csak m és k között vehet fel az f. Így, mivel $k > c$,

$$\begin{aligned}
&f(k+1) - f(k) = \\
&= a_n\big((k+1)^n - k^n\big) + a_{n-1}\big((k+1)^{n-1} - k^{n-1}\big) + \ldots + a_1\big((k+1) - k\big) = \\
&= a_n \left(nk^{n-1} + \binom{n}{2} k^{n-2} + \ldots + 1 \right) + \\
&\quad + a_{n-1} \left((n-1)k^{n-2} + \binom{n-1}{2} k^{n-3} + \ldots + 1 \right) + \ldots + a_1 = \\
&= n a_n k^{n-1} + c_{n-2} k^{n-2} + \ldots + c_1 k + c_0,
\end{aligned}$$

alkalmas, csak az a_i együtthatóktól és n-től függő c_j konstansokkal. Ezért

$$f(k+1) - f(k) = k^{n-1} \left(n a_n + \frac{c_{n-2}}{k} + \ldots + \frac{c_1}{k^{n-2}} + \frac{c_0}{k^{n-1}} \right).$$

Az első tényező $+\infty$-ben vett határértéke $+\infty$, a másodiké $n a_n$, így $f(k+1) - f(k)$ a $+\infty$-hez tart. Ebből következik, hogy tetszőlegesen sok egész szám esik $f(k+1)$ és $f(k)$ közé, ha k elég nagy, és ezeket az egész értékeket az f-nek $k+1$ és k közé eső racionális helyeken kell felvennie.

Utóbbiak általános alakja $k + \frac{s}{t} = \frac{kt+s}{t}$, ahol $0 < s < t$, és az s, t egészek egymáshoz relatív prímek.

Ha $f(k) < q < f(k+1)$, q egész, és $f\left(\frac{kt+s}{t}\right) = q$, akkor

$$a_n \left(\frac{kt+s}{t} \right)^n + a_{n-1} \left(\frac{kt+s}{t} \right)^{n-1} + \ldots + a_1 \left(\frac{kt+s}{t} \right) + a_0 = q,$$

$$a_n (kt+s)^n + a_{n-1} (kt+s)^{n-1} t + \ldots + a_1 (kt+s) t^{n-1} + a_0 t^n = q t^n,$$

$$-a_n (kt+s)^n = a_{n-1} (kt+s)^{n-1} t + \ldots + a_1 (kt+s) t^{n-1} + a_0 t^n - q t^n,$$

így $a_n (kt+s)^n$ osztható t-vel. Mivel s és t egymáshoz relatív prímek, azért $kt+s$ és t is relatív prímek egymáshoz, tehát az a_n is osztható t-vel. Ez véges sok (legfeljebb a_n darab) értéket enged meg t-nek, akkor viszont ($0 < s < t$ miatt) s, és így a szóbajövő $k + \frac{s}{t} = \frac{kt+s}{t}$ helyek száma is korlátozott – mondjuk, legfeljebb M. Ha k olyan nagy, hogy M-nél több egész szám esik $f(k+1)$ és $f(k)$ közé, akkor ellentmondást kapunk, tehát a kívánt polinom nem létezik.

Megjegyzés. Mind a három ismertetett megoldás a feltételezett polinomról csupán azt használja ki, hogy minden racionális értéket fölvesz racionális helyen; már ilyen polinom sem létezik tehát.