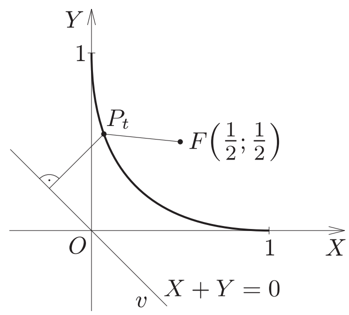
I. megoldás. Megmutatjuk, hogy a görbe minden pontja ugyanolyan távol van az $F\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ ponttól, mint az $X+Y=0$ egyenletű v egyenestől, vagyis illeszkedik arra a parabolára, amelynek fókuszpontja F, vezéregyenese pedig v.

Tudjuk, hogy valamely $P(x_0;y_0)$ pontnak az $AX+BY+C=0$ egyenletű e egyenestől való távolsága

$$d(P,e)=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Esetünkben tehát $d(P,v)=|x_0+y_0|/\sqrt{2}$, a PF szakasz hossza pedig a két pont távolságát megadó képlet szerint:

$$PF=\sqrt{\left(x_0-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y_0-\frac{1}{2}\right)^2}.$$



Mivel a vizsgált görbe minden pontja az első síknegyedben van, azért ha a görbe valamely P_t pontjának első koordinátája t, akkor $0\le t\le 1$ teljesül, és a pont koordinátái $\big(t,\big(1-\sqrt{t}\big)^2\big)$.

A $d(P_t,v)=FP_t$ feltétel a görbe pontjaira ekvivalens a $\big(d(P_t,v)\big)^2=FP_t^2$, vagyis a

$$\frac{\big(t+\big(1-\sqrt{t}\big)^2\big)^2}{2}=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\big(1-\sqrt{t}\big)^2-\frac{1}{2}\right)^2$$

egyenlőség fennállásával. A négyzetre emeléseket elvégezve és 4-gyel szorozva ebből azonos átalakítások után a

$$2\big(1+4t^2+8t-4t\sqrt{t}-4\sqrt{t}\big)=(4t^2+1-4t)+\big(4t^2+12t+1-16t\sqrt{t}+8\sqrt{t}\big).$$

azonosságot kapjuk.

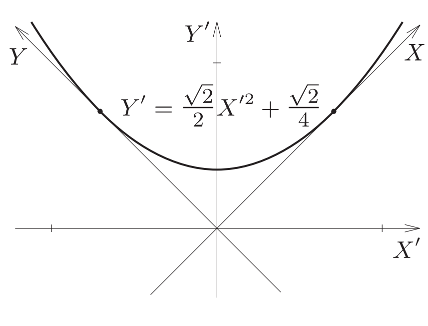
Ezzel állításunkat beláttuk.

II. megoldás. A görbe egyenlete nem változik, ha X-et és Y-t felcseréljük. Ez azt jelenti, hogy a görbe szimmetrikus az $Y=X$ egyenletű egyenesre, a koordinátatengelyek szögfelezőjére. Egy parabola egyenlete olyan koordinátarendszerben ölti a legegyszerűbb alakot, melynek egyik tengelye egybeesik a parabola szimmetriatengelyével. Ezért érdemes elforgatnuk az eredeti koordinátarendszert az origója körül úgy, hogy az új rendszer egyik tengelye legyen a régi $Y=X$ egyenes, azaz pl. $+315°$-kal.

Ha az új koordinátákat X' és Y' jelöli, akkor a transzformációs képletek szerint

$$X=\cos 315°X'-\sin 315°Y'=\frac{\sqrt{2}}{2}X'+\frac{\sqrt{2}}{2}Y',$$

$$Y=\sin 315°X'+\cos 315°Y'=\frac{-\sqrt{2}}{2}X'+\frac{\sqrt{2}}{2}Y'.$$



Tehát a görbe egyenlete az új koordinátarendszerben

$$\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}(X'+Y')}+\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}(Y'-X')}=1.$$

Mivel mindkét oldal nemnegatív, azért ugyanannak a görbének az egyenletét kapjuk, ha ezt az egyenletet négyzetre emeljük, majd rendezzük:

$$2\sqrt{Y'^2-X'^2}=\sqrt{2}-2Y'.$$

Ha most ismét négyzetre emelünk, akkor a kapott egyenletet az eredeti görbe minden pontjának koordinátái kielégítik (és a négyzetre emelés miatt esetleg más pontok koordinátái is):

$$4Y'^2-X'^2=2+4Y'^2-4\sqrt{2}Y'.$$

Tehát az eredeti görbe minden pontja rajta van az

$$Y'=\frac{\sqrt{2}}{2}X'^2+\frac{\sqrt{2}}{4}$$

egyenletű parabolán, s ezzel az állítást beláttuk.