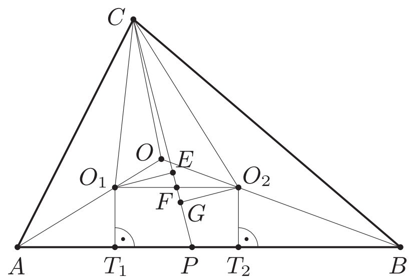
Megoldás. Tekintsük a feladatot megoldottnak. Az *1. ábra* jelöléseinek megfelelően legyen az ABC szögfelezőinek metszéspontja O, az APC háromszög beírt körének középpontja O_1, a BPC háromszög beírt köréé pedig O_2. Legyen az APC háromszögbe írt körnek az AB oldallal való érintési pontja T_1, a BPC háromszögbe írt körnek pedig ugyancsak az AB oldallal való érintési pontja T_2. Így a közös szögfelezők miatt O_1 rajta van az AO, O_2 pedig a BO szakaszon. Mivel a két beírt kör sugara egyenlő, $O_1T_1 = O_2T_2$, tehát $O_1T_1O_2T_2$ téglalap, így O_1O_2 párhuzamos AB-vel. Mivel O_1C és O_2C szögfelezők,

$$O_1CO_2\sphericalangle = O_1CP\sphericalangle + PCO_2\sphericalangle = \frac{1}{2}(ACP\sphericalangle + PCB\sphericalangle) = \frac{1}{2}ACB\sphericalangle.$$



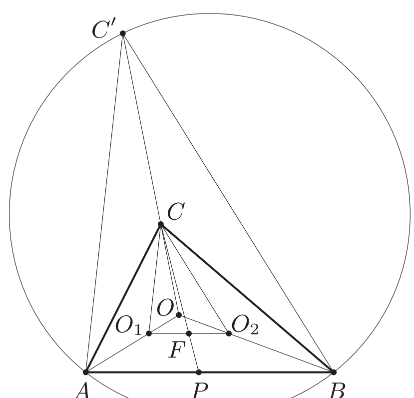
1. ábra

Így, ha $ACB\sphericalangle = \gamma$, akkor $O_1CO_2\sphericalangle = \dfrac{\gamma}{2}$.

A CP felezi az O_1O_2 szakaszt az F pontban, hiszen ha E és G az egyenlő sugarú körök érintési pontjai a CP-n, akkor $O_1EF\triangle \cong O_2GF\triangle$.

Mivel O_1O_2 párhuzamos AB-vel, az OAB és OO_1O_2 háromszögek hasonlóak. Van közös csúcsuk, O és két közös oldalegyenesük, tehát létezik olyan O középpontú nagyítás, amely az OO_1O_2 háromszöget pontosan OAB-be nagyítja.

Vizsgáljuk meg, hova vinné ez a nagyítás C-t. Mivel C-ből $\dfrac{\gamma}{2}$ szögben látszik O_1O_2, így olyan pontba kerülne, ahonnan $\dfrac{\gamma}{2}$ szögben látszik az AB oldal. Azt is tudjuk, hogy rajta maradna a C-n átmenő szögfelezőn, mivel C is és O is rajta van (*2. ábra*).



2. ábra

Ez a C' pont megszerkeszthető a P, O_1, O_2 pontok ismerete nélkül is. Tehát megkaphatjuk a nagyítás arányát. Ha megvan az arány, könnyen szerkeszthetjük a P pontot.

A szerkesztés menete: Megszerkesztjük a háromszög szögfelezőit. Az AB szakasz fölé $\dfrac{\gamma}{2}$-vel látókörívet szerkesztünk. Az OC félegyenes a látókörívet a C' pontban metszi.

Ezután az O középpontú, $\lambda = \dfrac{OC}{OC'}$ arányú kicsinyítéssel megkapjuk az O_1 és O_2 pontokat.

Az O_1O_2 szakaszt megfelezve, a felezőpont legyen F. Az OF egyenes kimetszi az AB szakaszból a keresett P pontot.

Diszkusszió: Ha az O_1 pont az O pontból indulva végighalad az OA szakaszon, miközben az O_1O_2 egyenes végig párhuzamos az AB-vel, az $O_1CO_2\sphericalangle$ nagysága szigorúan monoton növekszik nullától γ-ig. Így a $\dfrac{\gamma}{2}$ értéket az O_1O_2 szakasznak csak egyetlen helyzetében veszi fel. Ilyenkor a P pont mindig szerkeszthető, így minden háromszög esetében pontosan egy ilyen pont van.