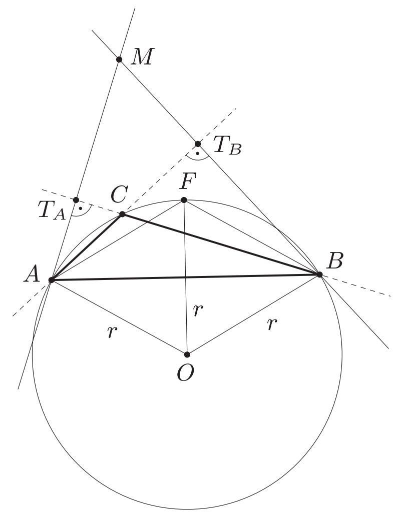
I. megoldás. Mivel a háromszög C csúcsánál lévő szög $120°$, a kerületi szögek tétele alapján az F pontból az AB szakasz $120°$-os szögben látszik. Ennek a szögnek a szögfelezőjén van rajta az O pont, mivel F az AB ív felezőpontja, ezért $AFO\sphericalangle = OFB\sphericalangle = 60°$. Az AFO és OFB háromszögek egyenlő szárúak és van $60°$-os szögük, ezért szabályosak, tehát $AF = FB = r$.

Az MT_ACT_B négyszög húrnégyszög, mert két szemközti szöge derékszög (*1. ábra*).



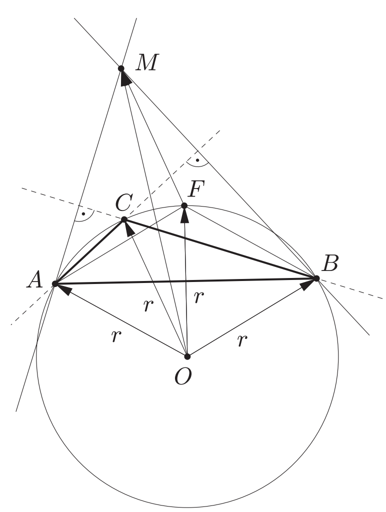
1. ábra

A húrnégyszögek tétele alapján $AMB + T_ACT_B = 180°$. Az utóbbi megegyezik $ACB\sphericalangle = 120°$-kal, mivel csúcsszögek, ezért $AMB\sphericalangle = 60°$. Ugyanakkor $AOB\sphericalangle = 2 \cdot 60° = 120°$, ezért az $AMBO$ négyszög is húrnégyszög. Az AOB háromszög körülírt körének középpontja F, mert $FA = FO = FB = r$.

Mivel $AMBO$ húrnégyszög, az M pont rajta van az AOB háromszög körülírt körén, amiből következik, hogy $MF = FO = r$, és ezt kellett bizonyítani.

II. megoldás. Mivel M a magasságpont és O az ABC háromszög köré írt kör középpontja, tudjuk, hogy $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

Vegyük észre, hogy az $OAFB$ négyszög rombusz, ugyanis a háromszögben a C csúcsnál lévő szög $120°$, így $AOB\sphericalangle$ is $120°$, mert a C pontból az AFB ív kiegészítő ívét látjuk $120°$ alatt, így az a középpontból $2 \cdot 120° = 240°$ alatt látszik, vagyis $AOB\sphericalangle = 360° - 240° = 120°$, és F-ből az AB húr ugyanakkora szög alatt látszik, mint C-ből. Ebből következik, hogy OAF és OFB egyenlő oldalú háromszögek.



2. ábra

Ha az $OAFB$ négyszög rombusz, akkor paralelogramma is, így $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OF}$. A *2. ábráról* látható, hogy $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{FM}$, így

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{FM},$$

amiből következik, hogy $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{FM}$. Mivel OF hossza egyenlő a kör sugarával, az OF távolság egyenlő az OC távolsággal, vagyis $OF = FM$.