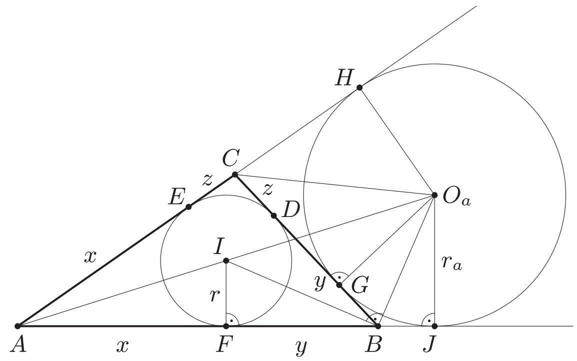
Megoldás. Először határozzuk meg a beírt kör és hozzáírt körök és az oldalegyenesek érintési pontjainak a háromszög csúcsaitól való távolságát. Jelöljük az érintési pontokat a *1. ábrán* látható módon D, E, F, G, H, J-vel. Egy külső pontból egy körhöz húzott két érintőszakasz hossza egyenlő, ezért $AH = AJ$, $BG = BJ$ és $CH = CG$, továbbá $AE = AF = x$, $BD = BF = y$ és $CD = CE = z$.



1. ábra

Az $x + y = c$, $y + z = a$ és $z + x = b$ összefüggésekből következik, hogy $2x + 2y + 2z = a + b + c = 2s$, azaz $x + y + z = s$, és így $x = s - a$, $y = s - b$, $z = s - c$. A hozzáírt körhöz húzott érintőszakaszokra pedig

$$2AH = AH + AJ = (AC + CG) + (AB + BG) = AC + AB + BC = 2s,$$

tehát $AH = AJ = s$, $BG = BJ = s - c$, $CH = CG = s - b$.

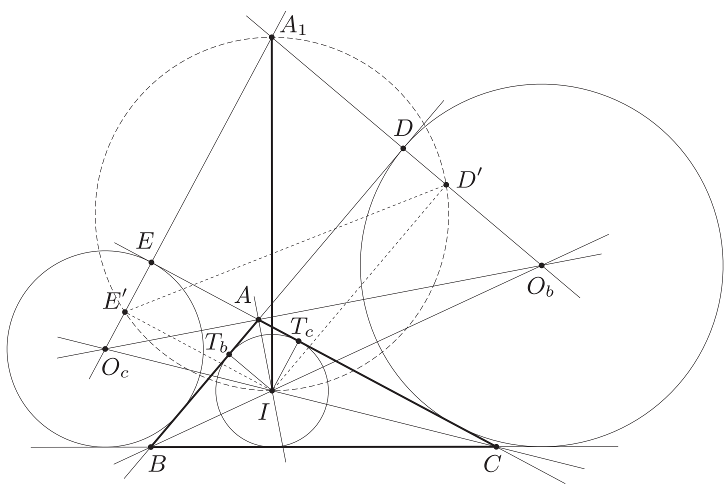
Ezután a *2. ábra* jelöléseit használva: E és D a hozzáírt körök és az oldalegyenesek érintési pontjai. T_b és T_c a beírt kör és az oldalak érintési pontjai. Az előzőek alapján:

$AT_b = AT_c = s - a$, $AD = s - c$, $AE = s - b$. Tehát

$$T_bD = s - a + s - c = 2s - a - c = (a + b + c) - a - c = b$$

és

$$T_cE = s - a + s - b = (a + b + c) - a - b = c.$$



2. ábra

Vegyünk fel az O_bD egyenesen egy D' pontot úgy, hogy $DD' = T_bI$ legyen. Tudjuk, hogy O_bDA és IT_bA derékszög. Tehát $DD'IT_b$ téglalap. Így $D'I = DT_b = b$. Hasonlóan vegyük fel E'-t is az O_cE egyenesen. Itt $E'I = ET_c = c$. Mivel $DD'IT_b$ és $EE'IT_c$ téglalap így $D'I$ és $E'I$ bezárt szöge ugyanakkora, mint T_bD és T_cE szöge, azaz α. Ebből következik, hogy az ABC háromszög és $D'IE'$ háromszög egybevágó, mivel két oldaluk és azok bezárt szöge megegyezik.

Mivel $AEA_1\sphericalangle$ és $ADA_1\sphericalangle$ derékszög és $EAD\sphericalangle = \alpha$, azért

$$EA_1D\sphericalangle = 180^\circ - \alpha.$$

Ebből következik, hogy $IE'A_1D'$ húrnégyszög. A körülírt kör sugara R, mivel az ABC háromszög és a $D'IE'$ háromszög egybevágó. Mivel $ID'A_1$ derékszög, A_1I a körülírt kör átmérője. Tehát $A_1I = 2R$, ezzel beláttuk az állítást.