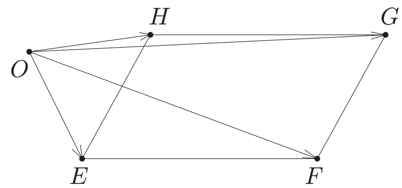
Megoldás. A parallelogrammák vektorok segítségével egyszerűen jellemezhetők. Egy rögzített O pontból indítsunk helyvektorokat, és jelöljük ezeket a megfelelő kisbetűvel, azaz legyen pl. $\overrightarrow{OP} = \mathbf{p}$. Először megadjuk a parallelogrammák vektoros leírását. Belátjuk a következő állítást.

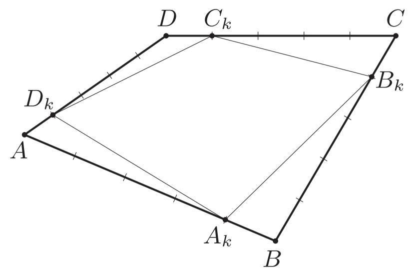
Valamely $EFGH$ konvex négyszög pontosan akkor parallelogramma, ha

$$\mathbf{e} + \mathbf{g} = \mathbf{f} + \mathbf{h}.$$



1. ábra

Ugyanis a négyszög pontosan akkor parallelogramma, ha valamelyik szemközti oldalpárja párhuzamos és egyenlő hosszú, azaz ha $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$. Ez viszont akkor és csak akkor teljesül, ha $\overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OH}$, azaz ha $\mathbf{f} - \mathbf{e} = \mathbf{g} - \mathbf{h}$, amiből átrendezéssel kapjuk állításunkat. (A bizonyításból az is látszik, hogy az O pont választásától független – az O-tól egyenként persze függő – a helyvektorokra vonatkozó egyenlőség teljesülése.)



2. ábra

Ezek után az eredeti feladat megoldása már egyszerű számolás. Mivel az új négyszög csúcsai az eredeti négyszög oldalait $k : (n-k)$ arányban osztják, így

$$\mathbf{a_k} = \frac{k\mathbf{b} + (n-k)\mathbf{a}}{n}, \qquad \mathbf{b_k} = \frac{k\mathbf{c} + (n-k)\mathbf{b}}{n},$$

$$\mathbf{c_k} = \frac{k\mathbf{d} + (n-k)\mathbf{c}}{n} \quad \text{és} \quad \mathbf{d_k} = \frac{k\mathbf{a} + (n-k)\mathbf{d}}{n}.$$

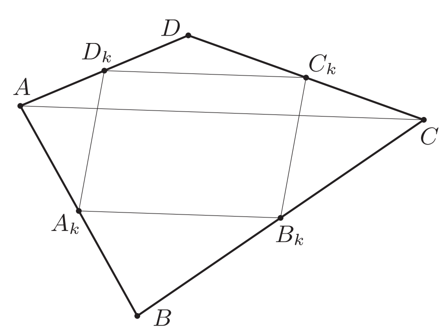
Az előzőek alapján tehát az $A_kB_kC_kD_k$ négyszög pontosan akkor parallelogramma, ha $\mathbf{a_k} + \mathbf{c_k} = \mathbf{b_k} + \mathbf{d_k}$, azaz ha

$$\frac{n-2k}{n}(\mathbf{a} + \mathbf{c} - \mathbf{b} - \mathbf{d}) = \mathbf{0}$$

teljesül.

Amennyiben $n \neq 2k$, úgy ebből $\mathbf{a} + \mathbf{c} = \mathbf{b} + \mathbf{d}$ következik, vagyis az $ABCD$ konvex négyszög is parallelogramma (és megfordítva). Ha pedig $n = 2k$, akkor ez a feltétel mindig teljesül.

Ez utóbbi azt a jól ismert tényt fejezi ki, hogy tetszőleges konvex négyszög oldalfelező pontjai egy parallelogrammát határoznak meg. (A *3. ábra* jelöléseit használva: A_kB_k az ABC, C_kD_k pedig az ADC háromszögben a háromszögek AC oldalával párhuzamos középvonala, ezért mindkét középvonal párhuzamos AC-vel és fele olyan hosszú, mint AC. Vagyis az $A_kB_kC_kD_k$ négyszög parallelogramma.)



3. ábra

Tehát a feladat állítása minden olyan (n, k) párra teljesül, amelyre $n \neq 2k$.