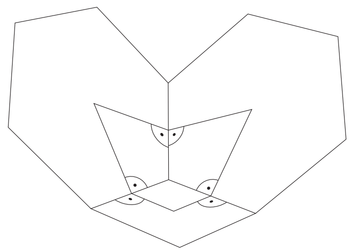
Megoldás. Egy konvex poliéder tetszőleges élétől tetszőleges másik éléhez eljuthatunk olyan élsorozaton át haladva, amelynek szomszédos tagjai ugyanannak a lapnak az élei; ezért, ha a keresett test létezik, akkor minden éle egységnyi hosszú.

Ha a poliédert alkotó lapok éleinek számát összeadjuk, akkor a poliéder élszámának kétszeresét kapjuk, hiszen a poliéder minden élénél két lap találkozik. Ezért a poliédernek

$$e = \frac{6 \cdot 4 + 8 \cdot 6}{2} = 36$$

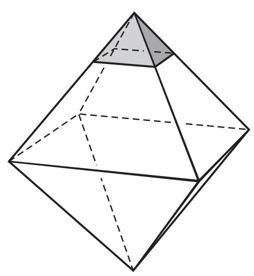
éle van. Euler poliédertétele szerint tehát csúcsainak száma $c = 36 + 2 - 14 = 24$. A nyolc darab hatszöglapnak összesen 48 csúcsa van, és semelyik két négyzetnek nincs közös csúcsa, továbbá a poliéder minden csúcsában legalább három lap találkozik, ezért a hatszöglapok közül semelyik háromnak nem lehet közös csúcsa, tehát a poliéder minden csúcsában pontosan egy négyzetlap és két hatszöglap találkozik. Ebből az is következik, hogy mindegyik négyzetlap ugyanakkora szögeket zár be a vele szomszédos négy hatszöglappal, valamint hogy bármely két szomszédos hatszöglap szöge is egyenlő (*1. ábra*).



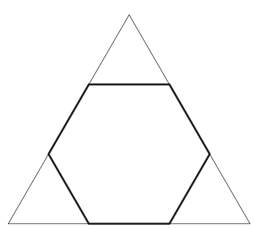
1. ábra

Konvex poliéderről lévén szó, ezek a feltételek a testet egybevágóság erejéig egyértelműen meghatározzák.

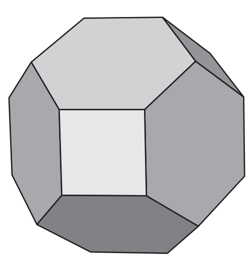
Egy ilyen testet kapunk akkor, ha egy 3 egység élű szabályos oktaéder minden csúcsánál levágjuk az oktaéderből azt a négyzet alapú gúlát, amelynek alaplapja az adott csúcsból kiinduló négy él csúcshoz közelebbi harmadolópontjai által alkotott négyzet (*2. ábra*). Az így kapott testnek az eredeti oktaéder minden csúcsánál egy-egy négyzetlapja keletkezik, míg az oktaéder minden eredeti háromszöglapjából egy-egy szabályos hatszög lesz (*3–4. ábra*).



2. ábra



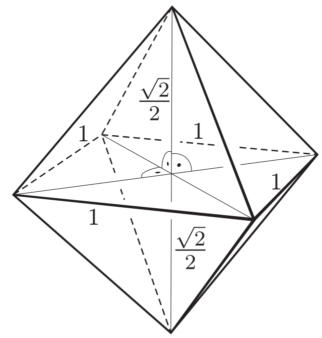
3. ábra



4. ábra

A levágott gúlák minden éle egységnyi hosszú, ezért két ilyen kis gúla egy egységnyi élű szabályos oktaéderré illeszthető össze. Ezen kis oktaéderek szemközti csúcsait összekötő testátlói egy-egy egységnégyzet átlói, ezért hosszuk $\sqrt{2}$ (*5. ábra*). Bármelyik ilyen testátló merőleges a fennmaradó négy csúcs által meghatározott négyzet síkjára, ezért egy ilyen kis oktaéder térfogata $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. Az eredeti oktaéder térfogata ennek $3^3 = 27$-szerese, vagyis a feladatunkban szereplő konvex test térfogata

$$V = 27 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} - 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} = 8\sqrt{2}.$$



5. ábra

Megjegyzések. 1. Az, hogy a keresett poliéder minden csúcsánál pontosan egy négyzetlap és két hatszöglap találkozik, Euler poliédertételének felhasználása nélkül is belátható. Ismert ugyanis, hogy ha egy konvex poliéder valamely csúcsánál összeadjuk a csúcsban találkozó lapoknak az adott csúcsnál lévő szögét, akkor ez az összeg kisebb, mint 360°. Mivel egy szabályos hatszög minden szöge 120°, ebből rögtön következik, hogy a hatszöglapok közül semelyik háromnak nem lehet közös csúcsa.

2. A feladatunkban szereplő test az úgynevezett *féligszabályos poliéderek* családjába tartozik. Azon poliédereket hívjuk így, amelyek csúcsalakzatai egybevágóak, lapjaik pedig szabályos sokszögek, de a szabályos poliéderekkel ellentétben vannak különböző oldalszámú lapjaik (esetünkben négy- és hatszöglapok).