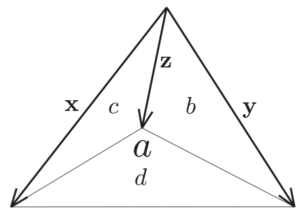
**Megoldás.** Jelölje a $d$ területű lappal szemközti csúcsból a másik három csúcsba mutató vektort $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ és $\mathbf{z}$. Feltehetjük, hogy a három vektor ebben a sorrendben jobbrendszert alkot. Ekkor a vektoriális szorzás definíciójából következik, hogy

$$2a = |\mathbf{x} \times \mathbf{y}|, \quad 2b = |\mathbf{y} \times \mathbf{z}| \quad \text{és} \quad 2c = |\mathbf{z} \times \mathbf{x}|.$$

Ugyanakkor a $d$ területű háromszöglap két oldalvektora $\mathbf{z} - \mathbf{x}$ és $\mathbf{y} - \mathbf{x}$ (*1. ábra*), ezért a vektoriális szorzásnak az összeadásra vonatkozó disztributivitása valamint a tetszőleges $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektorokra fennálló $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$ és $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ azonosságok miatt

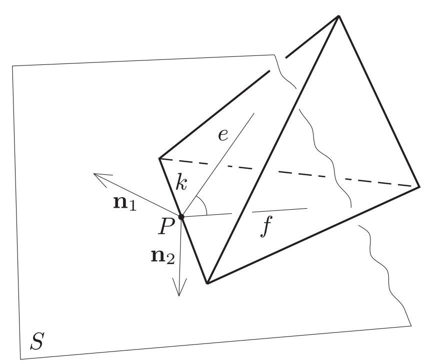
$$2d = |(\mathbf{z} - \mathbf{x}) \times (\mathbf{y} - \mathbf{x})| = |-\mathbf{x} \times \mathbf{y} - \mathbf{y} \times \mathbf{z} - \mathbf{z} \times \mathbf{x}|.$$

Az $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$, $\mathbf{y} \times \mathbf{z}$ és $\mathbf{z} \times \mathbf{x}$ vektorok merőlegesek a tetraéder megfelelő lapjaira, ezért az általuk bezárt szögek éppen a lapok által bezárt szögek kiegészítő szögei, azaz rendre $180° - \gamma$, $180° - \alpha$ és $180° - \beta$.




*1. ábra*

(Ezt az ismert összefüggést könnyen beláthatjuk. Ha a tetraéder két lapjának közös éle a $k$ szakasz, ennek egy tetszőleges belső pontja $P$, a $k$-ra merőleges $S$ sík pedig a lapokat az $e$ és $f$ szakaszokban metszi (*2. ábra*), akkor az e két szakasz által bezárt szög éppen a két lap szöge (ez a szög tompaszög is lehet, ellentétben a két lap síkjainak hajlásszögével).

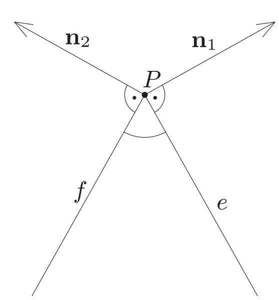



*2. ábra*

A lapok normálvektorai, $\mathbf{n}_1$ és $\mathbf{n}_2$ benne vannak az $S$ síkban, s mivel a normálvektorok az adott síkok minden egyenesére merőlegesek, azért $\mathbf{n}_1 \perp e$ és $\mathbf{n}_2 \perp f$ (*3. ábra*), amiből azonnal adódik a szögekre vonatkozó állítás.) Ezért a vektorok skaláris szorzatának tulajdonságait felhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
4d^2 &= (-\mathbf{x} \times \mathbf{y} - \mathbf{y} \times \mathbf{z} - \mathbf{z} \times \mathbf{x})^2 = \\
&= (\mathbf{x} \times \mathbf{y})^2 + (\mathbf{y} \times \mathbf{z})^2 + (\mathbf{z} \times \mathbf{x})^2 + \\
&\quad + 2(\mathbf{x} \times \mathbf{y})(\mathbf{y} \times \mathbf{z}) + 2(\mathbf{y} \times \mathbf{z})(\mathbf{z} \times \mathbf{x}) + 2(\mathbf{z} \times \mathbf{x})(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = \\
&= 4\big(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab \cdot \cos(180° - \gamma) + 2bc \cdot \cos(180° - \alpha) + \\
&\quad + 2ca \cdot \cos(180° - \beta)\big) = \\
&= 4\big(a^2 + b^2 + c^2 - 2ab \cdot \cos\gamma - 2bc \cdot \cos\alpha - 2ca \cdot \cos\beta\big),
\end{aligned}$$

amiből 4-gyel való osztás után adódik a bizonyítandó állítás.




*3. ábra*

*Megjegyzések.* 1. A feladat állítását nevezhetjük *tetraéderekre vonatkozó koszinusztételnek,* mert a „szokásos” koszinusztétel természetes általánosítása.

2. A megoldás során beláttuk azt az ismert állítást is, mely szerint *ha egy tetraéder minden lapjára egy olyan vektort állítunk, amely az adott lapra merőleges, kifelé mutat, hossza pedig megegyezik az adott lap területével, akkor az így kapott négy vektor összege* $\mathbf{0}$.