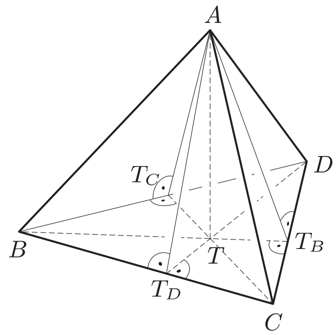
Megoldás. Először megmutatjuk, hogy T a BCD háromszög magasságpontja. Mivel AT merőleges a BCD síkra, merőleges annak minden egyenesére, így CD-re is. Mivel CD a tetraéder vele szemközti AB élére is merőleges, azért CD az ABT síkra is merőleges, merőleges az abban lévő BT egyenesre is, vagyis BT magasságvonal a BCD háromszögben (*1. ábra*). A tetraéder másik két szemközti élpárjának merőlegességét felhasználva ugyanígy látható be, hogy CT és DT is magasságvonalak a BCD háromszögben, tehát T a háromszög magasságpontja. Mivel BCD hegyesszögű, azt is tudjuk, hogy T a háromszög belső pontja.



1. ábra

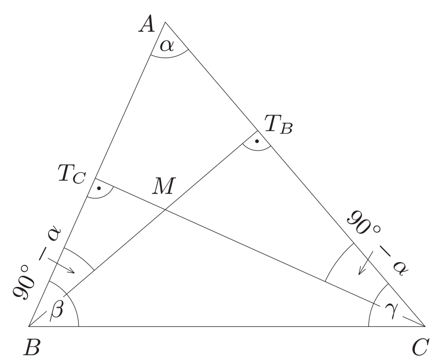
Legyen T_B a BT magasságvonal és a CD szakasz metszéspontja. Mivel az AT_B szakasz is benne van az ABT síkban, erre is merőleges a CD egyenes, tehát AT_B megegyezik az ACD háromszög A csúcshoz tartozó magasságvonalával. Ugyanígy láthatjuk be, hogy ha T_C, illetve T_D a BCD háromszög C-ből, illetve D-ből induló magasságvonalainak talppontjai, akkor $CT_C \perp BD$ és $DT_D \perp BC$.

Pont és egyenes között a legrövidebb távolság a pontból az egyenesre bocsátott merőleges szakasz hossza, a T_B, T_C és T_D pontok pedig a megfelelő háromszögoldalak belső pontjai, ezért az A-t T-vel összekötő töröttvonalak közül az ABC lapon áthaladó legrövidebbnek a hossza $AT_D + T_DT$, az ACD, illetve ABD lapokon áthaladó legrövidebbnek a hossza pedig $AT_B + T_BT$, illetve $AT_C + T_CT$. E három töröttvonal közül kell tehát a legrövidebbet kiválasztanunk.

Az ATT_B, ATT_C és ATT_D olyan derékszögű háromszögek, amelyeknek egyik befogója, AT, közös. Ezért közülük annak a kerülete a legkisebb, amelyiknek a másik befogója a legrövidebb. A legrövidebb befogó nyilván abban a háromszögben van, amelyikben a $TAT_B\sphericalangle$, $TAT_C\sphericalangle$ és $TAT_D\sphericalangle$ közül a legkisebb található. Ezek a szögek éppen $90°$-ra egészítik ki a BCD sík és az ACD, ABD, illetve ABC síkok hajlásszögét. Vagyis a legrövidebb töröttvonal azon az oldallapon fut, amelyik a tetraéder BCD lapjával a legnagyobb szöget zárja be.

Tehát a legrövidebb AT töröttvonalat úgy kapjuk, hogy kiválasztjuk az ABC, ACD és ABD lapok közül azt, amelyik a legnagyobb szöget zárja be a BCD lappal (ha több ilyen lap van, akkor ezek egyikét), majd ennek a lapnak az A-ból induló magasságának talppontját összekötjük A-val is és T-vel is.

Megjegyzés. A TT_B, TT_C és TT_D szakaszok közül a legkisebb kiválasztása tulajdonképpen azt jelenti, hogy a BCD hegyesszögű háromszögben meg kell találnunk azt az oldalt, amelyikhez legközelebb van a háromszög T magasságpontja. Ennek a feladatnak a megoldása azonnal adódik a következő észrevételből.



2. ábra

Hegyesszögű háromszög magasságpontja a háromszög bármely két oldala közül a rövidebbhez van közelebb. Ennek belátása a *2. ábrán* látható jelölések alapján egyszerű: Mivel $ACT_C\sphericalangle = ABT_B\sphericalangle = 90° - \alpha$,

$$MT_B = CT_B \operatorname{tg}(90° - \alpha) = (BC\cos\gamma)\operatorname{tg}(90° - \alpha) = a\cos\gamma\operatorname{tg}(90° - \alpha),$$
$$MT_C = BT_C \operatorname{tg}(90° - \alpha) = (BC\cos\beta)\operatorname{tg}(90° - \alpha) = a\ \cos\beta\operatorname{tg}(90° - \alpha).$$

Tudjuk, hogy egy háromszögben nagyobb szöggel szemben nagyobb oldal van, ezért ha $b > c$, akkor $\beta > \gamma$, azaz $\cos\gamma > \cos\beta$, tehát $MT_B > MT_C$.

Visszatérve feladatunkra tehát a legrövidebb töröttvonalat úgy kapjuk, hogy kiválasztjuk a BCD háromszög legrövidebb oldalát (ha több ilyen oldal van, akkor ezek egyikét), majd az ezen az oldalon lévő magasságtalppontot összekötjük A-val is és T-vel is.