Számozzuk meg a négyzet sorait fentről lefelé, oszlopait pedig balról jobbra 1-től 23-ig.

Színezzük ki először úgy a négyzetet, hogy a páratlan számú sorok legyenek feketék, és a párosak pedig fehérek. Ekkor 12×23 db fekete és 11×23 db fehér mező van. Minden 3×3-as négyzet vagy 3 db, vagy 6 db fekete mezőt fed le, és minden 2×2-es négyzet pontosan 2 db-ot. Emiatt a 3×3-as négyzetek által lefedett fekete és fehér mezők számának különbsége osztható 3-mal, valamint a 2×2-es négyzetek által lefedett fekete és fehér mezők számának különbsége is osztható 3-mal. Tudjuk, hogy az összes fekete és fehér mezők számának különbsége 23. Ha az 1×1-es négyzet fekete mezőn van, akkor a megmaradó fekete és a fehér mezők számának különbsége 22, ami nem osztható 3-mal, tehát a maradékot nem tudjuk lefedni 2×2-es és 3×3-as négyzetekkel. Emiatt az 1×1-es négyzet csak fehér mezőn lehet, vagyis páros sorban.

Most színezzük ki a 23×23-as táblát úgy, hogy a páratlan számú oszlopok legyenek feketék, a párosak pedig fehérek. Ekkor a fenti gondolatmenethez hasonló módon kapjuk, hogy az 1×1-es négyzet csak fehér mezőn lehet, vagyis csak páros sorszámú oszlopban.

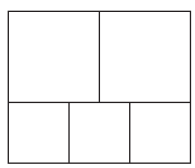
Most úgy színezzük ki a 23×23-as táblát, hogy azok a sorok, melyeknek sorszáma 3-mal osztható legyenek pirosak, a többi sor pedig legyen kék. Ekkor minden 3×3-as négyzet 6 db kék mezőt fed le, és minden 2×2-es négyzet vagy 2 db vagy 4 db kék mezőt fed le. Tehát minden 3×3-as és 2×2-es négyzet páros sok kék mezőt fed le. Tudjuk, hogy összesen 16×23, vagyis páros számú kék mező van. Ha az 1×1-es négyzet kék mezőn van, akkor páratlan számú kék mező marad, tehát nem tudjuk a maradékot 2×2-es és 3×3-as négyzetekkel lefedni. Emiatt az 1×1-es négyzet csak piros mezőn lehet, 3-mal osztható sorszámú sorban.

Most színezzük ki úgy a 23×23-as táblát, hogy azok az oszlopok, melyeknek sorszáma 3-mal osztható legyenek pirosak, a többi sor pedig legyen kék. Akkor a fenti gondolatmenethez hasonlóan kapjuk, hogy az 1×1-es négyzet csak piros mezőn lehet, 3-mal osztható sorszámú oszlopban.

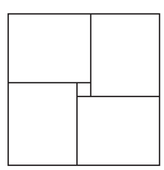
Tehát az 1×1-es négyzet csak 6-tal osztható sorszámú oszlopban és 6-tal osztható sorszámú sorban lehet, vagyis összesen 9 helyen lehet a táblán.

Most megmutatjuk, hogy ez a 9 lehetőség meg is valósítható.

Először megmutatjuk, hogy ha $k \geq 1$, akkor $(2k+1) \times 6n$-es téglalapot le lehet fedni 2×2-es és 3×3-as négyzetekkel. Egy $3 \times 6n$-es téglalapot le lehet fedni csak 3×3-as négyzetekkel. Egy 5×6-os téglalapot le lehet fedni az *1. ábrán* látható módon. Egy $5 \times 6k$-s téglalapot is le lehet fedni úgy, hogy k db 5×6-os téglalapra vágjuk, és ezeket már le tudjuk fedni. Egy $(2k+1) \times 6n$-es téglalapot pedig úgy fedünk le $(2k+1 > 5)$, hogy a széléről leválasztunk egy $5 \times 6n$-es téglalapot. Ezt le tudjuk fedni, és maradt egy $(2k+1-5) \times 6n = (2k-4) \times 6n$-es téglalap, amit már le tudunk fedni csak 2×2-es négyzetekkel.



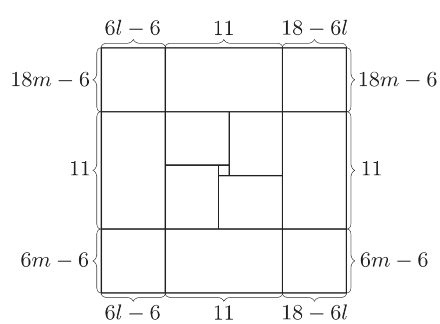
1. ábra



2. ábra

A *2. ábrán* látható módon egy db 1×1-es és 4 db 5×6-os téglalappal le tudunk fedni egy 11×11-es négyzetet, és az 1×1-es négyzet lesz a középpontja. Az i-edik oszlopban, j-edik sorban levő négyzet legyen az (i, j) négyzet. Legyen az 1×1-es négyzet a $(6l; 6m)$ négyzet, ahol $l \geq 1$, $m \geq 1$. Ekkor 4 db 5×6-os téglalappal és az 1×1-es négyzettel fedjük le ezt a 11×11-es négyzetet, aminek az 1×1-es négyzet a középpontja. A 11×11-es négyzet sarkainak koordinátája: $(6l-5; 6m-5)$, $(6l+5; 6m-5)$, $(6l-5; 6m+5)$, $(6l+5; 6m+5)$. Mivel $l > 0$, $m > 0$, azért a 11×11-es négyzet benne van a 23×23-as négyzetben.

A 11×11-es négyzet oldalai mentén vágjuk szét a 23×23-as négyzetet (*3. ábra*).



3. ábra

Ekkor 8 db téglalapot kapunk: egy $(6l-6)\times(6m-6)$-os téglalapot, egy $11 \times (6m-6)$-os téglalapot, egy $(18-6l) \times (6m-6)$-os téglalapot, egy $(18-6l) \times 11$-es téglalapot, egy $(18-6l) \times (18-6m)$-es téglalapot, egy $11 \times (18-6m)$-es téglalapot, egy $(6l-6) \times (18m-6)$-es téglalapot, és egy $(6l-6) \times 11$-es téglalapot. Mivel $6l < 23$ és $6m < 23$, emiatt $l \leq 3$ és $m \leq 3$. Tehát mind a nyolc téglalap oldalai nulla, vagy pozitív számok. Ezek közül négy olyan téglalap, hogy minden oldala páros, tehát ezeket le lehet fedni 2×2-es négyzetekkel, és 4 közülük $(2k+1) \times 6n$ alakú, amit pedig le tudunk fedni. Tehát így lefedtük a 23×23-as négyzetet. Beláttuk, hogy az 1×1-es négyzet a $(6l, 6m)$ koordinátájú pontokban helyezkedhet el.