Megoldás. Alakítsuk át az egyenlet jobb oldalát, felhasználva a $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ összefüggést:

$$\sin x + \frac{1}{2}\cos x = \sin^2(x + 45^\circ) = (\sin x \cdot \cos 45^\circ + \cos x \cdot \sin 45^\circ)^2.$$

A $\sin^2 45^\circ = \cos^2 45^\circ = \sin 45^\circ \cdot \cos 45^\circ = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ kiemelhető, így

$$\sin x + \frac{1}{2}\cos x = \frac{1}{2}(\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x),$$
$$\sin x + \frac{1}{2}\cos x = \frac{1}{2}(1 + 2\sin x \cos x).$$

Most rendezzük az egyenletet nullára és alakítsuk a kapott jobb oldali kifejezést szorzattá:

$$0 = \sin x \cos x - \sin x - \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2},$$
$$0 = \sin x(\cos x - 1) - \frac{1}{2}(\cos x - 1),$$
$$(\cos x - 1)\left(\sin x - \frac{1}{2}\right) = 0.$$

Szorzat pontosan akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla: $\cos x = 1$, vagy $\sin x = \frac{1}{2}$. Így a megoldások:

$$x_1 = k \cdot 360^\circ, \quad x_2 = 30^\circ + l \cdot 360^\circ, \quad x_3 = 150^\circ + m \cdot 360^\circ, \quad k, l, m \in \mathbb{Z}.$$

Behelyettesítéssel meggyőződhetünk arról, hogy mindegyik fenti érték valóban gyöke is az egyenletnek.