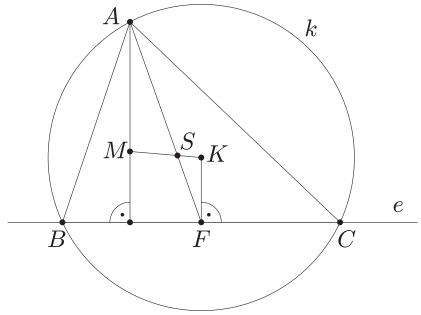
Megoldás. Jelölje a szerkesztendő háromszög adott csúcsát A, másik két csúcsát B és C, magasságpontját, súlypontját, illetve köréírt körének középpontját rendre M, S és K, a BC oldal felezőpontját pedig F. A továbbiakban feltesszük, hogy $A \neq S$, ellenkező esetben nyilván nem oldható meg a feladat.

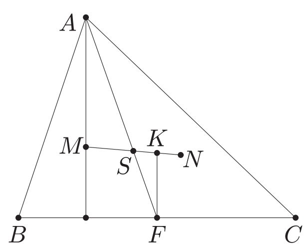


1. ábra

Tudjuk, hogy a súlypont harmadolja a súlyvonalakat, ezért az S pont az AF szakasz F-hez közelebbi harmadolópontja. Továbbá S az MK szakaszt is $2:1$ arányban osztja az Euler-egyenes tulajdonságaiból következően. Ennek alapján az F és K pontok könnyen megszerkeszthetők. Ezek ismeretében pedig a B és C csúcsok is, mert egyrészt rajta vannak a K középpontú, KA sugarú k körvonalon, másrészt pedig az AM egyenesre merőleges, F-en áthaladó e egyenesen. Ezeket tehát k és e két metszéspontja adja.

Az így szerkesztett ABC háromszögnek k nyilván a körülírt köre. A szerkesztésből következik, hogy az SFK és SAM háromszögek egymáshoz középpontosan hasonlóak, a hasonlóság középpontja az S pont, aránya pedig -2. Ezért FK párhuzamos AM-mel, tehát az e egyenes FK-ra is merőleges, amiből következik, hogy KF a k kör BC húrjának felezőmerőlegese, vagyis F a BC oldal felezőpontja. Mivel S harmadolja az AF szakaszt, megegyezik az ABC háromszög súlypontjával, s mivel a KM szakaszt is harmadolja, azért az Euler-egyenes tulajdonságaiból következik, hogy a megszerkesztett ABC háromszögnek M valóban magasságpontja.

A feladat diszkussziója bonyolultabb a szerkesztésnél. Ha az előzőekben leírt szerkesztés során a k kör is és az e egyenes is egyértelműen megszerkeszthető,akkor pontosan akkor van megoldás, ha az F pont a k kör belsejébe esik, ami akkor teljesül, ha $KA > KF = \dfrac{AM}{2}$. A KA szakasz hosszát kifejezhetjük az AM, MS és AS szakaszok hosszával, mert AS, illetve KA súlyvonala az AMN, illetve ASN háromszögnek, ahol N az M pontnak S-re való tükörképe (*2. ábra*).



2. ábra

A háromszög súlyvonalának hosszára vonatkozó, elfajuló esetekben is érvényes (a szokásos jelölésekkel $4s_c^2 = 2\left(a^2+b^2\right)-c^2$) képlet alapján

$$4AS^2 = 2AM^2 + 2AN^2 - MN^2 \quad \text{és} \quad 4KA^2 = 2AS^2 + 2AN^2 - SN^2.$$

Mivel $SN = SM$ és $MN = 2SN$, ebből rövid számolással

$$4KA^2 = 6AS^2 + 3MS^2 - 2AM^2$$

adódik, vagyis a $KA > \dfrac{AM}{2}$ feltétel ekvivalens az adott A, M és S pontokra vonatkozó $2AS^2 + MS^2 > AM^2$ egyenlőtlenséggel.

Ha az A és M pontok egybeesnek, akkor a szerkesztés minden lépése elvégezhető, de az e egyenes nem egyértelműen meghatározott. Ekkor K és F is egybeesik, és az e egyenesnek bármely K-n áthaladó, A-t nem tartalmazó egyenes választható. Így végtelen sok különböző megoldást kapunk (a megszerkesztett háromszögek mindegyikének A-nál lévő szöge derékszög).

Végül, ha a szerkesztés valamelyik lépése nem végezhető el, akkor nincs megoldás. Ez két fő esetben fordul elő.

1. A k kört nem tudjuk megszerkeszteni. Ez akkor következik be, ha K egybeesik A-val, vagyis ha az S pont az MA szakaszon helyezkedik el és azt $2:1$ arányban osztja.

2. A k kör megszerkeszthető, továbbá k és e metszi egymást, de k és e egyik metszéspontja az A pont. Ez pontosan akkor következik be, ha a KFS szög derékszög, ami pedig pontosan akkor teljesül, ha a vele megegyező nagyságú MAS szög derékszög.