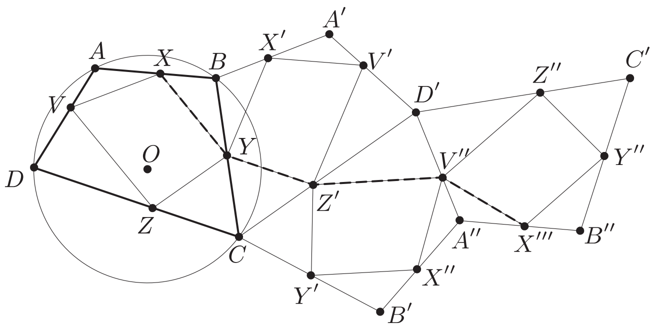
Megoldás. Jelölje a négyszög csúcsait negatív körüljárás szerint A, B, C és D, szögeit α, β, γ és δ, a beírt négyszög csúcsait pedig X, Y, Z és V. Mivel $ABCD$ húrnégyszög, ezért van két olyan szomszédos szöge, melyek egyike sem hegyesszög. Választhatjuk úgy a csúcsok betűzését, hogy $\alpha, \beta \geq 90°$ teljesüljön.

A legkisebb kerületű beírt négyszög keresését az ilyen feladatoknál szokásos tükrözéses módszerrel végezzük, azaz a legrövidebb zárt sokszögvonal meghatározását visszavezetjük két adott pont közti legrövidebb út megkeresésére. Ennek érdekében az $ABCD$ négyszöget egymás után három egyenesre tükrözzük. Először a BC oldal egyenesére tükrözve kapjuk az $A'BCD'$ négyszöget. Ezt a CD' oldal egyenesére tükrözve az $A''B'CD'$ négyszöghöz, végül pedig azt a $D'A''$ oldal egyenesére tükrözve az $A''B''C'D'$ négyszöghöz jutunk. A tükrözések során a $ABCD$ négyszögbe írt $XYZV$ négyszög előbb az $X'YZ'V'$, majd az $X''Y'Z'V''$, végül pedig az $X'''Y''Z''V''$ négyszögbe kerül. Mivel a tengelyes tükrözés távolságtartó, az $XYZV$ négyszög kerülete megegyezik az $XYZ'V''X'''$ töröttvonal hosszával, ami legalább akkora, mint az XX''' szakasz hossza (*1. ábra*).



1. ábra

Megmutatjuk, hogy az XX''' szakasz hossza nem függ az X pontnak az AB szakaszon elfoglalt helyzetétől. Az AB félegyenest 180°-os forgatás viszi a BA félegyenesbe. Mivel $ABC\sphericalangle = CBA'\sphericalangle = \beta$, a BA félegyenest 2β szögű forgatás viszi át a BA' félegyenesbe, azt 180°-os forgatás viszi az $A'B$ félegyenesbe, amit pedig α szögű forgatás visz az $A'D'$ félegyenesbe. Ezt 180°-os forgatás viszi a $D'A'$ félegyenesbe, amit 2δ szögű forgatás visz a $D'A''$ félegyenesbe. Végül a $D'A''$ félegyenest 180°-os forgatás viszi az $A''D'$ félegyenesbe, amit $-\alpha$ szögű forgatás visz az $A''B''$-be. Mivel $ABCD$ húrnégyszög, azért $2\delta = 360° - 2\beta$. A forgatások szögeinek összege 360°-nak egész számú többszöröse, ezért az $A''B''$ félegyenes iránya megegyezik az AB félegyenesével, tehát $\overrightarrow{AA''} = \overrightarrow{BB''} = \overrightarrow{XX'''}$. Vagyis az XX''' szakasz hossza megegyezik AA'' hosszával, tehát független az X pontnak az AB szakaszon elfoglalt helyzetétől.

Ha az XX''' szakasz metszi a BC, CD' és $D'A''$ szakaszokat, akkor az Y, Z és V pontok megválaszthatók úgy, hogy az Y, Z' és V'' pontok rendre ezekkel a metszéspontokkal essenek egybe. Nyilvánvaló, hogy az $XYZV$ négyszög kerülete ebben az esetben lesz a lehető legkisebb. Ha viszont ez nem teljesül, akkor az $XYZ'V''X'''$ töröttvonal hossza csak úgy lehet a lehető legkisebb, ha valamelyik töréspont csúcspontba esik. Könnyű meggondolni, hogy ekkor azon $XYZV$ négyszögek közül, melyeknek X csúcsa rögzített, a többi pedig a megfelelő oldalak belsejébe esik, nem lesz legkisebb kerületű, hiszen az ilyen négyszögek kerülete a legrövidebb töröttvonal hosszát tetszőlegesen megközelítheti ugyan, de el nem érheti. Vagyis ha nem található az AB oldal belsejében a fenti tulajdonsággal rendelkező X pont, akkor a feladatnak nincsen megoldása.

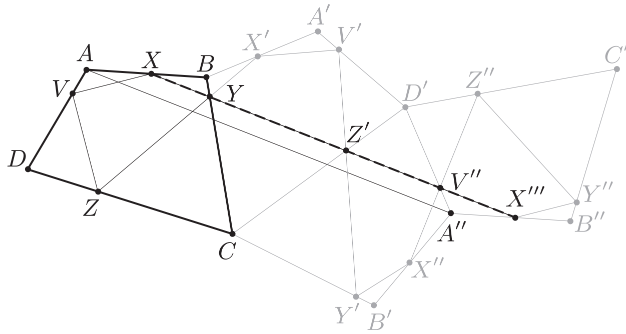
A megoldhatóságnak tehát nyilvánvalóan szükséges feltétele, hogy az $ABB''A''$ paralelogramma körüljárása is negatív irányú legyen, vagyis hogy az $A''AA'$ irányított szög a BAA' szögnél nagyobb legyen. Az $AA'B$ egyenlőszárú háromszögben a B-nél lévő szög $360° - 2\beta = 2\delta$, tehát $BAA'\sphericalangle = 90° - \delta$. Ehhez hasonló az $A''A'D'$ háromszög, a hasonlóság aránya pedig $AD : AB$, vagyis az $A'A$ szakaszt ilyen arányú, α szögű forgatva nyújtás viszi az $A'A''$ szakaszba. Ezért az $A''AA'$ háromszög hasonló a DBA háromszöghöz, tehát $A''AA'\sphericalangle = ABD\sphericalangle = ACD\sphericalangle$. Vagyis az $A''AA'\sphericalangle > BAA'\sphericalangle$ feltétel egyenértékű az $ACD\sphericalangle > 90° - CDA\sphericalangle$ feltétellel, ami pontosan akkor teljesül, ha $DAC\sphericalangle < 90°$, ez pedig $\alpha, \beta \geq 90°$ mellett pontosan azt jelenti, hogy az ACD háromszög hegyesszögű, azaz körülírt körének középpontja a háromszög belsejében van. Vagyis az $ABCD$ négyszög körülírt körének középpontja a négyszög belsejébe esik.

Megmutatjuk, hogy ha ez a feltétel teljesül, akkor az AA'' szakasz, esetleg a C pont érintésével, végig az $ADCB'A''D'A'B$ sokszögön belül halad. Ehhez csak annyit kell ellenőrizni, hogy az AA'' szakasz a BC egyenest a BC szakaszon metszi, vagyis hogy $CAB\sphericalangle \geq A''AB\sphericalangle$. Mivel

$$A''AB\sphericalangle = A''AA'\sphericalangle - BAA'\sphericalangle = 90° - DAC\sphericalangle,$$

ez pontosan akkor áll fenn, ha $\alpha = DAC\sphericalangle + CAB\sphericalangle \geq 90°$, ez viszont kezdeti feltevésünk miatt igaz. Hasonlóképpen igazolható az is, hogy a BB'' szakasz, esetleg a D' pont érintésével, végig a $BCB'A''B''C'D'A'$ sokszögön belül halad, ez ugyanis ekvivalens a $\beta \geq 90°$ feltétellel. Ekkor viszont az X pont tetszőleges választása esetén teljesül, hogy az XX''' szakasz metszi a BC, CD' és $D'A''$ szakaszok mindegyikét.

Összefoglalva tehát, a feladatnak pontosan akkor van megoldása, ha az $ABCD$ húrnégyszög körülírt körének középpontja a négyszög belsejébe esik. Ekkor a feladatnak végtelen sok megoldása van, melyek a következő eljárással kaphatók meg. Szerkesszük meg az A', B', C', D', A'' és B'' pontokat az 1. ábrának megfelelően. Az AB szakasz tetszőleges X belső pontját kijelölve, az AA''-vel X-en át húzott párhuzamos a BC, CD', $D'A''$ szakaszokat elmetszi az Y, Z', V'' pontokban. Innen a V', Z, V pontok tükrözésekkel megkaphatók, és így létrejön egy $XYZV$ négyszög, ami megoldása a szerkesztési feladatnak (*2. ábra*).



2. ábra