**I. megoldás.** Azt fogjuk igazolni, hogy az $n$ prímtényezős alakjában lévő bármelyik $p^a$ prímhatvány osztója az $\binom{n}{k} \cdot (n,k)$ számnak.

Legyen a $k$ prímtényezős alakjában a $p$ prímszám kitevője $b$. Ha $a \le b$, akkor $p^a \mid (n,k)$, így

$$p^a \;\Big|\; \binom{n}{k} \cdot (n,k).$$

Ha $a > b$, akkor végezzük el a következő átalakítást:

$$\binom{n}{k} \cdot (n,k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot (n,k) = \frac{n}{k} \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot (n,k) = n \cdot \binom{n-1}{k-1} \frac{(n,k)}{k}.$$

Mivel $p^a \mid n$ és $p^b \mid (n,k)$, azért

$$p^a \;\Big|\; n \cdot \frac{(n,k)}{k}, \quad \text{vagyis} \quad p^a \;\Big|\; n \cdot \binom{n-1}{k-1} \frac{(n,k)}{k}.$$

Tehát ebben az esetben is igaz, hogy $p^a \;\Big|\; \binom{n}{k} \cdot (n,k)$. Ezzel az állítást beláttuk.

**2. megoldás.** Szalay Mihály: *Számelmélet* című könyvének 1.13. tételére hivatkozunk.

Ha $d = (n,k)$, akkor léteznek $p$, $q$ egész számok, hogy $d = n \cdot p + k \cdot q$. Ekkor

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} \cdot (n,k) &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot d = \frac{n!}{k!(n-k)!}(n \cdot p + k \cdot q) = \\ &= \frac{n \cdot p \cdot n!}{k!(n-k)!} + \frac{k \cdot q \cdot n!}{k!(n-k)!} = n \cdot p \cdot \binom{n}{k} + \frac{k \cdot q \cdot n \cdot (n-1)!}{k \cdot (k-1)!(n-k)!} = \\ &= n \cdot \left(p \cdot \binom{n}{k} + q \cdot \binom{n-1}{k-1}\right).\end{aligned}$$

A zárójelben lévő szám egész szám, tehát $n \;\Big|\; \binom{n}{k} \cdot (n,k)$.