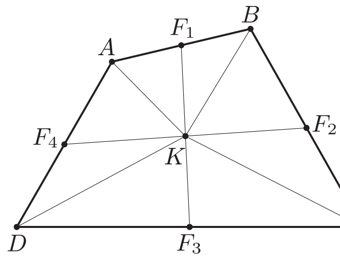
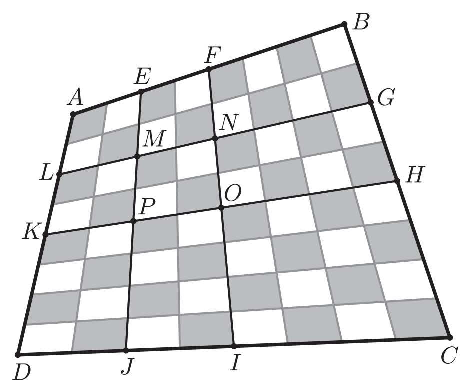
Megoldás. Először bizonyítsuk be, hogy egy konvex négyszöget a két középvonala olyan négyszögekre oszt, melyek közül a két-két szemközti területének összege egyenlő. Tekintsünk egy konvex négyszöget és húzzuk be a középvonalait, valamint a középvonalak metszéspontját a csúcsokkal összekötő szakaszokat.



Az F_3 pont a DC szakasz felezőpontja, ezért $DF_3 = F_3C$. A DF_3K és F_3CK háromszögek K csúccsal szemközti oldalai egy egyenesre esnek és egyenlő hosszúak, és K csúcsuk egybeesik (ezért a magasságuk egyenlő), így területük egyenlő. Ugyanez elmondható a DF_4K és az F_4KA; az AKF_1 és az F_1KB, valamint az F_2KB és az F_2KC háromszögekről is. Így a következőket kapjuk: $T_{DF_3K} = T_{F_3CK}$, $T_{DF_4K} = T_{F_4KA}$, $T_{F_1KB} = T_{AKF_1}$, $T_{F_2KB} = T_{F_2KC}$. Összeadva:

$$T_{DF_3K} + T_{DF_4K} + T_{F_1KB} + T_{F_2KB} = T_{F_3CK} + T_{F_4KA} + T_{AKF_1} + T_{F_2KC},$$
$$T_{DF_3KF_4} + T_{KF_1BF_2} = T_{F_4AF_1K} + T_{KF_2CF_3},$$

és ezt akartuk belátni.



Most tekintsük a teljes sakktáblát. Ismeretes, hogy a konvex négyszögek középvonalai (az *ábrán* FI és KH) felezik egymást. Vagyis az O pont az FI és a KH szakasznak is felezőpontja. Tekintsük az $AFID$ négyszöget. Ennek KO az egyik, EJ pedig a másik középvonala. Mivel a középvonalak felezik egymást, a P pont a KO és az EJ szakasznak is felezőpontja. Hasonló okokból az N pont az FO és az LG szakaszok közös felezőpontja. Ebből pedig következik, hogy az $AFOK$ négyszögben az M pont lesz az LN és a PE szakaszok felezőpontja, hiszen azok a négyszög középvonalai.

Hasonló gondolatmenetek egymás utáni alkalmazásával megkapjuk, hogy az összes belső osztópont nyolcadolópont. Ez pedig azt jelenti, hogy például az $AFOK$ négyszögben a 2×2-es sakktáblácskák is a középvonalaik mentén lettek felosztva, tehát a felosztásukkor keletkezett szemközti negyedeik, azaz a fehér és fekete negyedek területének összege egyenlő.

Mivel a nagy sakktábla 16 ilyen kis táblácskából épül fel és ezekben a fekete és fehér négyszögek területe megegyezik, azért ez igaz a nagy sakktáblára is.

Ezzel az állítást bebizonyítottuk.