Megoldás. Mivel α, β és γ egy háromszög szögei, szinuszaik 1-nél kisebb pozitív számok. Ezekre a pozitív számokra alkalmazva a számtani és a mértani közepek közti egyenlőtlenséget kapjuk, hogy

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{3}\geq\sqrt[3]{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}.$$

Négyzetre emelve és átrendezve

$$(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)^2>9\sqrt[3]{(\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma)^2}$$

adódik. Állításunk bizonyításához ezért elég megmutatnunk, hogy ha

$$s=\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma,\quad \text{akkor}\quad \sqrt[3]{s^2}>s.$$

A szögek szinuszai mind 1-nél kisebbek, ezért szorzatuk is az, vagyis $s<1$, amiből következik, hogy

$$s^2(1-s)>0,\quad \text{azaz}\quad s^2>s^3,$$

ebből pedig köbgyököt vonva éppen a bizonyítandó állítást kapjuk.

Megjegyzés. A feladatban szereplő egyenlőtlenség nem éles. Megmutatjuk, hogy az erősebb

$$(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)^2\geq6\sqrt{3}\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

egyenlőtlenség is teljesül, és ez tovább nem javítható, mert szabályos háromszög esetén egyenlőség áll fenn.

A következő, vázlatos bizonyításban szereplő tételek mindegyikének részletes kidolgozása megtalálható pl. *Kiss György: Amit jó tudni a háromszögekről* című cikkében, lapunk 2002. márciusi számának 130–139. oldalain[1]. Jelöljük a háromszög oldalait a szokásos módon a, b, c-vel, félkerületét s-sel, területét T-vel, köré írható körének sugarát pedig R-rel. Ekkor az általánosított szinusztétel szerint a bizonyítandó állítás

$$\left(\frac{a}{2R}+\frac{b}{2R}+\frac{c}{2R}\right)^2\geq6\sqrt{3}\cdot\frac{a}{2R}\cdot\frac{b}{2R}\cdot\frac{c}{2R}.$$

Rendezve, és felhasználva az $abc=4RT$ összefüggést azt kell belátnunk, hogy $(2s)^2\geq\geq12\sqrt{3}T$, ami ekvivalens az $s^4\geq27T^2$ egyenlőtlenséggel. Ez utóbbi viszont adódik Héron képletéből és a számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenségből:

$$27T^2=27s(s-a)(s-b)(s-c)\leq27s\left(\frac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{3}\right)^3=27s\cdot\left(\frac{s}{3}\right)^3=s^4.$$

[1] A `http://www.komal.hu/cikkek/kissgy/haromszogekrol/amitjotudni.h.shtml` címen a cikk honlapunkon is megtalálható.