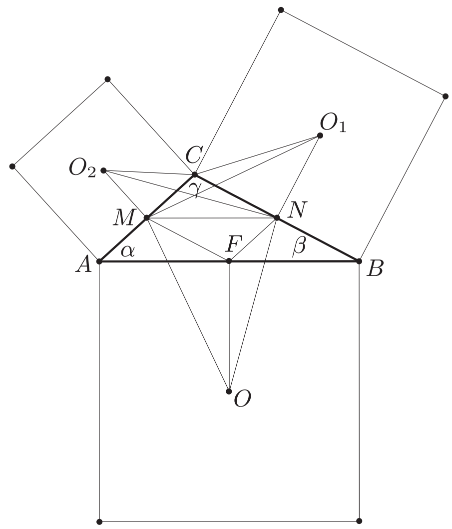
Megoldás. Jelöljük az ABC háromszög oldalait a, b, c-vel, szögeit α, β, γ AB oldalának felezőpontját F-fel. Állítsunk a háromszög BC és CA oldalaira is kifelé négyzeteket, és jelöljük ezek középpontjait O_1, O_2-vel.



Felhasználjuk, hogy a háromszög középvonalai párhuzamosak az oldalakkal és fele akkora hosszúságúak, továbbá azt, hogy egy négyzet középpontját egyik oldalfelező ponttal összekötve a kapott szakasz merőleges az adott oldalra, és fele akkora hosszúságú. Ezek szerint

$$\begin{aligned}
NFB\sphericalangle &= CMN\sphericalangle = CAB\sphericalangle = \alpha,\\
AFM\sphericalangle &= MNC\sphericalangle = ABC\sphericalangle = \beta,\\
NFO\sphericalangle &= O_2MN\sphericalangle = 90^\circ + \alpha,\\
MFO\sphericalangle &= O_1NM\sphericalangle = 90^\circ + \beta.
\end{aligned}$$

Így az ONF és NO_2M háromszögek, továbbá az OFM és O_1NM háromszögek egybevágók, mivel két-két oldaluk és az általuk közbezárt szög megegyezik.

Az egybevágóság következményeként $ON = NO_2 = x$ és $OM = MO_1 = y$. A négyzet átlója az oldallal 45°-os szöget zár be, ezért $0^\circ < \gamma \le 135^\circ$ esetén

$$NCO_2\sphericalangle = MCO_1\sphericalangle = \gamma + 45^\circ,$$

$135^\circ < \gamma < 180^\circ$ esetén pedig

$$NCO_2\sphericalangle = MCO_1\sphericalangle = 360^\circ - (\gamma + 45^\circ).$$

Felhasználva, hogy a négyzet átlójának fele az oldal hosszának $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$-szerese:

$$CN = \frac{a}{2},\quad CM = \frac{b}{2},\quad CO_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2},\quad CO_2 = \frac{b\sqrt{2}}{2}.$$

Másrészt a $\cos\gamma = \cos(360^\circ - \gamma)$ azonosság alapján a CMO_1 és a CNO_2 háromszögekre, vagy elfajuló háromszögekre egységesen az alábbi alakban írható fel a koszinusz-tétel:

$$\begin{aligned}
y^2 &= \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{b}{2}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2}\cos(\gamma - 45^\circ)\\
x^2 &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{b\sqrt{2}}{2}\cos(\gamma - 45^\circ).
\end{aligned}$$

A feltételek szerint a és b állandók, az x^2 és y^2, illetve ezekkel szinkronban az x és y maximumának feltétele, hogy $\cos(\gamma + 45^\circ) = -1$, azaz $\gamma + 45^\circ = 180^\circ$, vagyis $\gamma = 135^\circ$ legyen.

Ekkor

$$x^2 = \left(\frac{a}{2} + \frac{b\sqrt{2}}{2}\right)^2,\quad y^2 = \left(\frac{b}{2} + \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2,$$

vagyis

$$x = \frac{a}{2} + \frac{b\sqrt{2}}{2} \quad \text{és} \quad y = \frac{b}{2} + \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Összegük:

$$x + y = \frac{(a+b)\left(1+\sqrt{2}\,\right)}{2}.$$

Tehát az ACB szöget $135°$-osnak választva az OM és ON távolságok összegének maximuma

$$\frac{(AC+BC)\left(1+\sqrt{2}\,\right)}{2}.$$