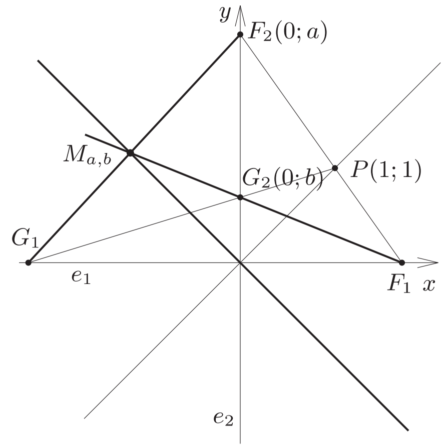
I. megoldás. Vegyünk fel egy derékszögű koordinátarendszert úgy, hogy annak x tengelye az e_1, az y tengelye az e_2 egyenes legyen, az egységet pedig válasszuk úgy, hogy a P pont mindkét koordinátája 1 legyen. Ha $F_2=(0;a)$, ahol $a\neq 1$, akkor az f egyenes egyenlete $Y=(1-a)X+a$, vagyis az F_1 pont koordinátái $\left(\frac{a}{a-1};0\right)$. Hasonlóképpen ha $G_2=(0;b)$, akkor a g egyenes egyenlete $Y=(1-b)X+b$, a G_1 pont koordinátái pedig $\left(\frac{b}{b-1};0\right)$, ahol $b\neq 1$. Továbbá $a\neq b$ is teljesül, mert f és g különböző egyenesek.



1. ábra

Ha a és b valamelyike 0, akkor az $F_1G_2\cap F_2G_1$ metszéspont az origó. Ha $a\neq 0\neq b$, akkor az F_1G_2 és F_2G_1 egyenesek egyenlete a tengelymetszeteikből egyszerűen felírható.

$$F_1G_2:\quad \frac{X}{\frac{a}{a-1}}+\frac{Y}{b}=1,\quad \text{azaz}\quad Y=\frac{b(1-a)}{a}X+b,$$

$$F_2G_1:\quad \frac{X}{\frac{b}{b-1}}+\frac{Y}{a}=1,\quad \text{azaz}\quad Y=\frac{a(1-b)}{b}X+a.$$

Ha $\frac{b(1-a)}{a}=\frac{a(1-b)}{b}$, azaz $a+b=ab$, akkor a két egyenes párhuzamos. Ha $a+b\neq ab$, akkor létezik $M_{a,b}=(x_0;y_0)$ metszéspontjuk, és az egyenletrendszert megoldva kapjuk, hogy

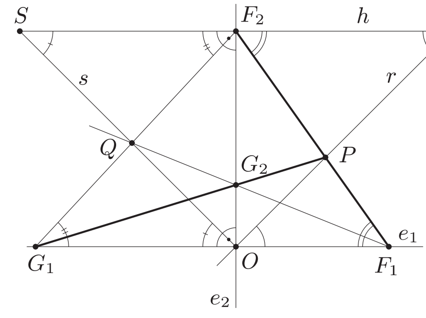
$$x_o=\frac{ab}{ab-(a+b)}\quad \text{és}\quad y_0=\frac{-ab}{ab-(a+b)}=-x_0,$$

ami azt jelenti, hogy $M_{a,b}$ mindig rajta van az $Y=-X$ egyenletű egyenesen, ami az e_1 és e_2 egyenesek másik szögfelezője.

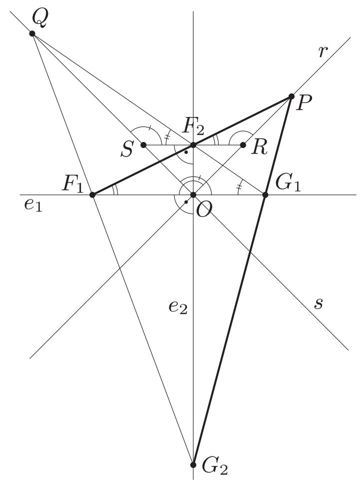
Megmutatjuk, hogy az $Y=-X$ egyenes minden pontja előáll $M_{a,b}$ alakban. Az origóról már láttuk, hogy a mértani helyhez tartozik. Ezért elegendő azt meggondolnunk, hogy a és b megfelelő választásával $\frac{1}{x_0}=1-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$ még az $a,b\neq 0,1$, $a\neq b$ feltételek mellett is tetszőleges értéket felvehet, ami nyilvánvaló. A keresett mértani hely tehát az e_1 és e_2 egyenesek két szögfelezője közül a P pontot nem tartalmazó teljes szögfelező egyenes.

II. megoldás. Megmutatjuk, hogy a keresett mértani hely az e_1 és e_2 egyenesek másik szögfelezője.

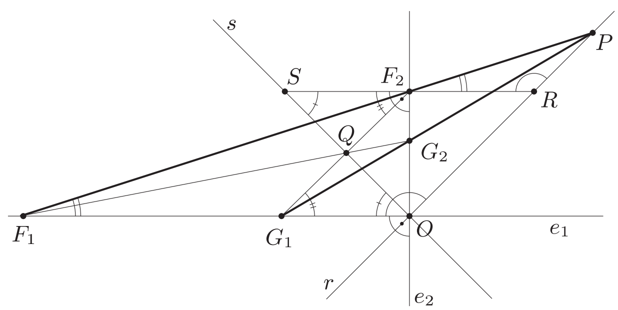
Jelöljük r-rel az e_1 és e_2 egyenesek P pontot tartalmazó szögfelezőjét, s-sel pedig a két egyenes másik szögfelezőjét. Legyen h az F_2 ponton átmenő e_1-gyel párhuzamos egyenes, továbbá legyen $O=e_1\cap e_2$, $Q=F_1G_2\cap F_2G_1$, $R=r\cap h$ és $S=s\cap h$. Az e_1, e_2, f és g egyenesek lehetséges helyzetétől függően az O pont az F_1G_1 és F_2G_2 szakaszok közül egyiknek sem (*2. ábra*), pontosan egynek (*3. ábra*), vagy mindkettőnek (*4. ábra*) belső pontja. Következő állításaink mindhárom esetben érvényesek.



2. ábra



3. ábra



4. ábra

Mivel h és e_1 párhuzamosak, a POF_1 és a PRF_2 háromszögek, valamint a QOG_1 és a QSF_2 háromszögek is hasonlóak, mert megfelelő szögeik megegyeznek. Tehát a háromszögek megfelelő oldalainak aránya is egyenlő, azaz

$$\frac{F_1O}{PF_1} = \frac{F_2R}{F_2P} \quad \text{és} \quad \frac{G_1Q}{OG_1} = \frac{QF_2}{F_2S}. \tag{1}$$

Alkalmazzuk az $F_1G_1F_2$ háromszögre és a G_2 pontra Ceva tételének általánosítását. Mivel az F_1Q, G_1P és F_2O egyenesek mindegyike átmegy G_2-n, ezért

$$\frac{F_1O}{OG_1} \cdot \frac{G_1Q}{QF_2} \cdot \frac{F_2P}{PF_1} = 1, \quad \text{azaz} \quad \frac{F_1O}{PF_1} \cdot \frac{G_1Q}{OG_1} \cdot \frac{F_2P}{QF_2} = 1,$$

amiből felhasználva az (1) egyenlőségeket, kapjuk, hogy $F_2R = F_2S$. Ez viszont azt jelenti, hogy az OF_2R és OF_2S háromszögek egybevágóak, mert megegyezik két-két oldaluk és az azok által bezárt szög (hiszen a h egyenes definíciója miatt $OF_2R\sphericalangle = OF_2S\sphericalangle = 90°$.) Vagyis $F_2OQ\sphericalangle = F_2OP\sphericalangle = 45°$, tehát Q rajta van az s egyenesen.

Megmutatjuk, hogy az s egyenes tetszőleges T pontja előáll $F_1G_2 \cap F_2G_1$ alakban megfelelően választott f^T és g^T egyenesek esetén. Először legyen f^T egy rögzített, P-n átmenő, e_i-t F_i-ben metsző egyenes, $G_1^T = F_2T \cap e_1$ és $G_2^T = PG_1^T \cap e_2$. Ekkor a P-n átmenő $G_1^TG_2^T$ egyenest választva g^T-nek, az $F_1G_2 \cap F_2G_1$ pont éppen T lesz. Ez az előállítás nem működik, ha TF_2 és e_1 párhuzamosak, valamint akkor sem, ha $T = f \cap s$. Ezt a két pontot úgy tudjuk előállítani $F_1G_2 \cap F_2G_1$ alakban, ha megváltoztatjuk az elsőnek felvett f^T egyenest. Ezzel elérhetjük, hogy az új egyeneshez tartozó két „rossz” pont különbözzön az első egyeneshez tartozó rossz pontoktól.