Megoldás. Az állítást az n szerinti teljes indukcióval igazoljuk; $n=0$-ra az üres szorzatot 1-nek tekintve a két oldal között egyenlőség áll fenn.

Ezután tegyük fel, hogy az egyenlőtlenség teljesül $n=k$-ra, vagyis

(1)
$$1+\frac{1}{a_0}\left(1+\frac{1}{a_1-a_0}\right)\dots\left(1+\frac{1}{a_k-a_0}\right)\le$$
$$\le\left(1+\frac{1}{a_0}\right)\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\dots\left(1+\frac{1}{a_k}\right).$$

Az $n=k+1$ esetben azt kellene belátnunk, hogy

(2)
$$1+\frac{1}{a_0}\left(1+\frac{1}{a_1-a_0}\right)\dots\left(1+\frac{1}{a_k-a_0}\right)\left(1+\frac{1}{a_{k+1}-a_0}\right)\le$$
$$\le\left(1+\frac{1}{a_0}\right)\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\dots\left(1+\frac{1}{a_k}\right)\left(1+\frac{1}{a_{k+1}}\right).$$

Ehhez – az (1)-est is figyelembe véve – elegendő azt igazolni, hogy

(3)
$$\frac{1}{a_0}\left(1+\frac{1}{a_1-a_0}\right)\dots\left(1+\frac{1}{a_k-a_0}\right)\frac{1}{a_{k+1}-a_0}\le$$
$$\le\left(1+\frac{1}{a_0}\right)\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\dots\left(1+\frac{1}{a_k}\right)\frac{1}{a_{k+1}},$$

hiszen az (1)-es és (3)-as feltételek megfelelő oldalainak összegzésével kaphatjuk meg a (2)-es sort.

A (3) bizonyításához is teljes indukciót alkalmazunk. Ekkor $k=0$ esetén azt kell igazolnunk, hogy

$$\frac{1}{a_0}\cdot\frac{1}{a_1-a_0}\le\left(1+\frac{1}{a_0}\right)\frac{1}{a_1}.$$

Az $a_0\cdot a_1(a_1-a_0)>0$ mennyiséggel beszorozva az alábbi eklivalens egyenlőtlenséget kapjuk:

$$a_1\le(a_0+1)(a_1-a_0),$$
$$a_0\le a_0\cdot a_1-a_0^2,$$

illetve az $a_0>0$-val osztva:

$$1\le a_1-a_0.$$

Ez a követelmény pedig a feladat feltétele alapján már teljesül. Ezután tegyük fel, hogy az állítás $k=\ell$ esetén teljesül, vagyis:

(4)
$$\frac{1}{a_0}\left(1+\frac{1}{a_1-a_0}\right)\dots\left(1+\frac{1}{a_\ell-a_0}\right)\frac{1}{a_{\ell+1}-a_0}\le$$
$$\le\left(1+\frac{1}{a_0}\right)\dots\left(1+\frac{1}{a_l}\right)\frac{1}{a_{\ell+1}}.$$

Ebből $k=\ell+1$ esetén azt kellene belátnunk, hogy

(5)
$$\frac{1}{a_0}\left(1+\frac{1}{a_1-a_0}\right)\dots\left(1+\frac{1}{a_\ell-a_o}\right)\left(1+\frac{1}{a_{\ell+1}-a_0}\right)\frac{1}{a_{\ell+2}-a_0}\le$$
$$\le\left(1+\frac{1}{a_0}\right)\dots\left(1+\frac{1}{a_\ell}\right)\left(1+\frac{1}{a_{\ell+1}}\right)\frac{1}{a_{\ell+2}}.$$

Ehhez – a (4)-est is figyelembe véve – elegendő belátni, hogy

(6)
$$\left(1+\frac{1}{a_{\ell+1}-a_0}\right)\frac{a_{\ell+1}-a_0}{a_{\ell+2}-a_0}\le\left(1+\frac{1}{a_{\ell+1}}\right)\frac{a_{\ell+1}}{a_{\ell+2}},$$

hiszen a (4)-es és (6)-os egyenlőtlenségek megfelelő oldalainak összeszorzásával adódik az (5)-ös.

Beszorozva a pozitív $(a_{l+2}-a_0)\cdot a_{l+2}$ mennyiséggel, ekvivalens átalakítások során:

$$(a_{\ell+1}-a_0+1)a_{\ell+2}\le(a_{\ell+1}+1)(a_{\ell+2}-a_0),$$
$$a_0\le a_0\cdot a_{\ell+2}-a_0\cdot a_{\ell+1},$$

végül $a_0>0$-val osztva: $1\le a_{\ell+2}-a_{\ell+1}$.

Ez a követelmény a feladat feltétele alapján teljesül. Ezzel az állítást igazoltuk. Az egyenlőség feltétele a levezetés alapján $a_{k+1}-a_k=1$ feltétel teljesülése minden $k=0,1,\dots,n-1$ esetén.