Megoldás. A $p(x)$ függvény nem lehet konstans. Indirekt tegyük fel, hogy a $p(x)$ konstans. Mivel zérushelye van, azért csak a $p(x) \equiv 0$ lehet, ekkor $q(x) = p(x+1) \equiv 0$ ugyan páros, de nincs lokális maximumhelye a feltétellel ellentétben. Így igazoltuk, hogy $p(x)$ nem lehet konstans.

A $p(x)$ függvény zérus- és egyben minimum helyei az $x_1 = -3$, és $x_2 = 5$. A két gyök ismeretében felírhatjuk a gyöktényezős alakját:

$$p(x) = (x+3)(x-5)\left(ax^2 + bx + c\right).$$

Mivel a $p(x)$ függvénynek két minimum helye van, azért legalább negyedfokú. Másodfokú és harmadfokú nem lehet, mert ezeknek legfeljebb egy minimumhelye van. Ebből következik, hogy $a \neq 0$.

Írjuk fel a $q(x) = p(x+1)$ polinomot:

$$\begin{aligned} q(x) = p(x+1) &= \left[a(x+1)^2 + b(x+1) + c\right](x+1+3)(x+1-5) = \\ &= \left(ax^2 + (2a+b)x + a + b + c\right)(x+4)(x-4) = \\ &= \left[ax^2 + (2a+b)x + a + b + c\right]\left(x^2 - 16\right). \end{aligned}$$

Tudjuk, hogy a $p(x+1)$ polinom páros, amiből következik, hogy az x_0 gyökkel együtt a $-x_0$ is gyöke, ezért

$$ax^2 + (2a+b)x + a + b + c = a\left(x^2 - x_0^2\right),$$

és innen $2a + b = 0$, $q(x) = a\left(x^2 - x_0^2\right)\left(x^2 - 16\right)$. A feltétel szerint a $q(x)$-nek ± 4 minimumhelye is; ez csak úgy lehet, hogy $x_0 = \pm 4$, így $q(x) = a\left(x^2 - 16\right)^2$. Ennek $x = 0$-ban van lokális maximum helye, ezért a lokális maximumának értéke $256 = q(0) = a \cdot 16^2$, azaz $a = 1$.

A keresett $p(x)$ polinom pedig a következő:

$$\begin{aligned} p(x) = q(x-1) &= \left[(x+3)(x-5)\right]^2 = \left(x^2 - 2x - 15\right)^2 = \\ &= x^4 - 4x^3 - 26x^2 + 60x + 225. \end{aligned}$$