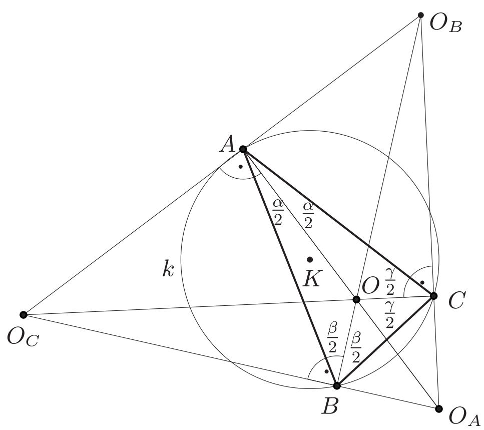
Megoldás. Jelölje a szerkesztendő háromszög csúcsait és szögeit a szokásos módon A, B, C, illetve α, β, γ, a körülírt kör legyen k, középpontja K, a beírt kör középpontja O, a hozzáírt körök középpontjai pedig O_A, O_B és O_C. Először megmutatjuk, hogy $O_AO_BO_C$ olyan hegyesszögű háromszög, amelynek talpponti háromszöge ABC, Feuerbach-köre pedig k (*1. ábra*, ezeket az állításokat a **B. 4428.** feladat megoldása[1] során is beláttuk).

Tudjuk, hogy a beírt kör középpontja a három belső, a hozzáírt körök középpontjai pedig két külső és egy belső szögfelező metszéspontjai. A háromszög bármely csúcsához tartozó külső és belső szögfelezők merőlegesek egymásra, ezért $AO_A \perp O_BO_C$, $BO_B \perp O_AO_C$ és $CO_C \perp O_BO_A$. Tehát az AO_A, BO_B és CO_C szakaszok az $O_AO_BO_C$ háromszög magasságszakaszai, azaz az A, B és C pontok e háromszög magasságvonalainak talppontjai, vagyis a rajtuk átmenő kör (ami egyúttal az ABC háromszög körülírt köre) az $O_AO_BO_C$ háromszög Feuerbach-köre. A hozzáírt körök középpontjainak szimmetrikus szerepe miatt az $O_AO_BO_C$ háromszög hegyesszögű voltának belátásához elegendő megmutatnunk, hogy $O_BO_CO_A\sphericalangle < 90°$. Mivel

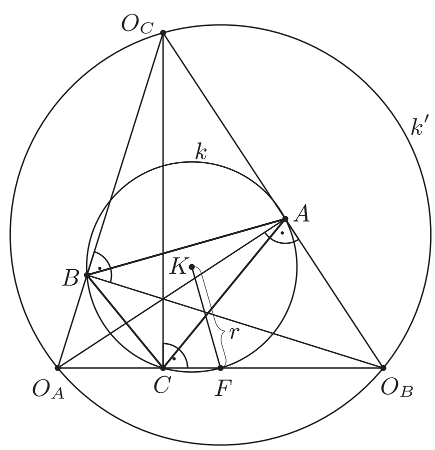
$$ABO_C\sphericalangle = O_BBO_C\sphericalangle - O_BBA\sphericalangle = 90° - OBA\sphericalangle = 90° - \frac{\beta}{2},$$

és ugyanígy kapjuk, hogy $BAO_C\sphericalangle = 90° - \dfrac{\alpha}{2}$, azért

$$O_BO_CO_A\sphericalangle = AO_CB\sphericalangle = 180° - (ABO_C\sphericalangle + BAO_C\sphericalangle) =$$
$$= 180° - \left(\left(90° - \frac{\beta}{2}\right) + \left(90° - \frac{\alpha}{2}\right)\right) = \frac{\alpha+\beta}{2} < \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} = 90°.$$



1.ábra



2.ábra

Ezek után felhasználva, hogy bármely háromszög Feuerbach-körének sugara éppen fele a háromszög köré írható kör sugarának, a szerkesztés már egyszerűen elvégezhető. Feltehetjük, hogy a hozzáírt körök középpontjai közül O_A és O_B adott.

Először megszerkesztjük az O_AO_B szakasz F felezőpontját, majd a K középpontú $KF = r$ sugarú kört, ami megegyezik k-val. Ezek után megszerkesztjük az $O_AO_BO_C$ háromszög köré írható k' kört, tudván hogy ez áthalad az O_A és O_B pontokon, sugara pedig kétszerese a k kör sugarának (vagyis k' középpontja az O_A, illetve O_B középpontú $2r$ sugarú körök metszéspontja, sugara pedig $2r$). A szerkesztendő háromszög C csúcsa a k kör és az O_AO_B szakasz

[1] KöMaL, 2013/2., 94. o.

F-től különböző metszéspontjaként adódik (vagy egybeesik F-fel, ha k érinti a szakaszt). A C-ben az O_AO_B egyenesre állított, a K-t tartalmazó félsíkba mutató merőleges félegyenes és k' metszéspontjaként megkapjuk az O_C pontot. Végül az O_A-ból O_BO_C-re, illetve O_B-ből O_AO_C-re állított merőlegesek talppontjai adják az A, illetve B pontokat (*2. ábra*).

Az így szerkesztett ABC háromszög megfelel a feltételeknek, mert nyilván az $O_AO_BO_C$ háromszög talpponti háromszöge, azaz hozzáírt köreinek középpontjai rendre O_A, O_B és O_C, körülírt köre pedig a K középpontú k kör.

A feladatnak legfeljebb egy megoldása van. Akkor kapunk megoldást, ha a szerkesztés minden lépését el tudjuk végezni, azaz ha a következő feltételek teljesülnek:

– A K pont nem esik az O_AO_B egyenesre, mert az $O_AO_BO_C$ háromszög belső pontja kell, hogy legyen.

– A K pontnak az O_AO_B szakaszra eső merőleges vetülete közelebb van az F ponthoz, mint az O_A és O_B pontok bármelyikéhez, ez ugyanis annak szükséges és elégséges feltétele, hogy a k körnek az O_AO_B egyenessel alkotott második metszéspontja (vagy érintési pontja) az O_AO_B szakasz belsejébe essen.

– A KF szakasz kétszerese hosszabb az O_AO_B szakasz felénél. Ez a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy az $O_AO_BO_C$ háromszög hegyesszögű legyen.