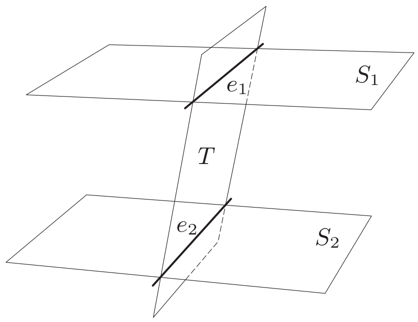
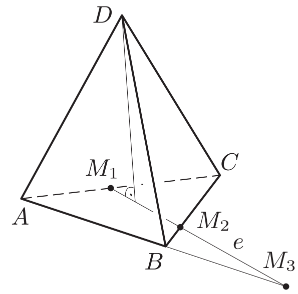
Ha az egymással párhuzamos S_1 és S_2 síkokat valamely T sík az e_1 és e_2 egyenesekben metszi, akkor e_1 és e_2 párhuzamosak (*1. ábra*). Ugyanis egyrészt benne vannak a T síkban, másrészt nem lehet közös pontjuk. Ha ugyanis valamely P pont mindkét egyenesen rajta lenne, akkor P az S_1 és S_2 síkok közös pontja lenne, ami ellentmond a két sík párhuzamosságának. Mivel egymással párhuzamos egyenesek bármely rögzített egyenessel egyenlő szögeket zárnak be, elegendő a $\operatorname{tg}^2\varphi_1 + \operatorname{tg}^2\varphi_2 + \operatorname{tg}^2\varphi_3$ kifejezés értékeit abban az esetben meghatároznunk, ha a lapra merőleges sík átmegy a tetraéder negyedik csúcsán.



1. ábra



2. ábra

Feltehetjük tehát, hogy az $ABCD$ szabályos tetraéder ABC lapsíkjára merőleges, azt az e egyenesben metsző T sík átmegy a tetraéder D csúcsán. Ekkor T átmegy az ABC lap S súlypontján is, mert a DS egyenes merőleges az ABC síkra. Jelölje M_1, M_2 és M_3 az e egyenes és az ABC háromszög oldalegyeneseinek metszéspontját (*2. ábra*). Ekkor

$$\operatorname{tg}^2\varphi_1 + \operatorname{tg}^2\varphi_2 + \operatorname{tg}^2\varphi_3 = \frac{DS^2}{SM_1^2} + \frac{DS^2}{SM_2^2} + \frac{DS^2}{SM_3^2},$$

mert a DSM_i háromszögek S-nél lévő szöge derékszög. Az e egyenes az ABC háromszög egyik oldalával párhuzamos is lehet. Ebben az esetben valamelyik M_i pont nem jön létre. Összefüggésünk azonban ekkor is érvényes, ha a párhuzamos egyenesek szögét szokás szerint $0°$-nak tekintjük, az $\dfrac{1}{SM_i}$ értékét pedig 0-nak.

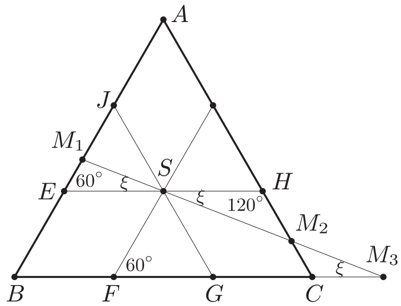
Mivel a keresett kifejezés értéke

nyilván független a tetraéder élhosszától, feltehetjük, hogy az élek hossza 6. Ekkor $AS = \dfrac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$, tehát

Pitagorasz tétele szerint $DS^2 = AD^2 - AS^2 = 24$. Ha bevezetjük az $a_i = SM_i$ $(i = 1, 2, 3)$ jelölést, akkor tehát

$$\operatorname{tg}^2\varphi_1 + \operatorname{tg}^2\varphi_2 + \operatorname{tg}^2\varphi_3 = 24\left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \frac{1}{a_3^2}\right).$$

Vagyis elegendő az a_i szakaszok reciprokainak négyzetösszegét meghatároznunk. Ezzel feladatunkat visszavezettük egy síkbeli problémára.



3. ábra

Megmutatjuk, hogy a vizsgált négyzetösszeg értéke állandó. Rajzoljuk meg az ABC háromszög oldalaival párhuzamos, S-en átmenő egyeneseket. Ezek ABC-t három rombuszra és három kis szabályos háromszögre osztják (*3. ábra*). Ha e egybeesik a három párhuzamos valamelyikével, akkor az $\dfrac{1}{a_i}$ értékek közül

az egyik 0, a másik kettő értéke pedig $\dfrac{1}{2}$. Tehát ekkor

$$\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \frac{1}{a_3^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Ha e az ABC háromszög egyik oldalával sem párhuzamos, akkor a három kis szabályos háromszög közül pontosan az egyiknek az S-sel szemközti oldalát metszi annak belső pontjában. A *3. ábra* jelöléseit használva a szimmetria miatt feltehetjük, hogy ez a JES kis háromszög, továbbá M_1 a JE szakasz belső pontja és $SM_2 \leq SM_3$. Ekkor $SE = SF = SH = 2$, $M_1ES\sphericalangle = SFM_3\sphericalangle = 60°$ és $SHM_2\sphericalangle = 120°$. Legyen $SM_3F\sphericalangle = \xi$. Ekkor az egyállású és a váltószögek egyenlősége miatt $M_1SE\sphericalangle = HSM_2\sphericalangle = \xi$, továbbá $SM_1E\sphericalangle = 120° - \xi$ és $SM_2H\sphericalangle = 60° - \xi$, mert bármely háromszögben a szögek összege $180°$. A szinusztételt alkalmazva az ESM_1 háromszögben, kapjuk, hogy

$$\frac{SE}{SM_1} = \frac{\sin(120° - \xi)}{\sin 60°}, \quad \text{azaz} \quad \frac{1}{a_1^2} = \left(\frac{\sin(120° - \xi)}{2\sin 60°}\right)^2 = \frac{\sin^2(120° - \xi)}{3}.$$

Ha pedig a HSM_2 és FSM_3 háromszögekben írjuk fel a szinusztételt, akkor ugyanígy kapjuk, hogy

$$\frac{1}{a_2^2} = \frac{\sin^2(60° - \xi)}{3} \qquad \text{és} \qquad \frac{1}{a_3^2} = \frac{\sin^2 \xi}{3}.$$

Tehát felhasználva a $\sin\alpha = \sin(180° - \alpha)$ azonosságot, majd az addíciós képleteket alkalmazva

$$3\left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \frac{1}{a_3^2}\right) = \sin^2(\xi + 60°) + \sin^2(60° - \xi) + \sin^2\xi =$$

$$= \sin^2\xi + \left(\frac{1}{2}\sin\xi + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\xi\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\xi - \frac{1}{2}\sin\xi\right)^2 =$$

$$= \frac{3}{2}\sin^2\xi + \frac{3}{2}\cos^2\xi = \frac{3}{2}.$$

Vagyis az a_i szakaszok reciprokainak négyzetösszege ekkor is $\frac{1}{2}$.

Ezért a $\mathrm{tg}^2\,\varphi_1 + \mathrm{tg}^2\,\varphi_2 + \mathrm{tg}^2\,\varphi_3$ kifejezés értéke, a metsző sík helyzetétől függetlenül, mindig $24 \cdot \frac{1}{2} = 12$ lesz.