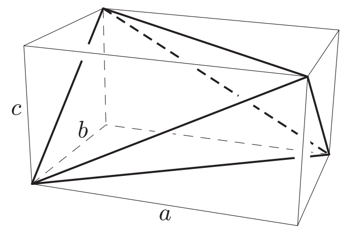
Megoldás. Megmutatjuk, hogy a feltételből nem következik a tetraéder szabályossága. Egy konkrét ellenpélda helyett azt látjuk be, hogy a feladatban szereplő egyenlőtlenség minden *egyenlő oldalú tetraéderre* tejesül. Egy tetraédert egyenlő oldalúnak nevezünk, ha lapjai egybevágó háromszögek. Ilyen tetraédert alkot bármely téglatest két szemközti lapján lévő két nem párhuzamos lapátlójának négy végpontja (*1. ábra*). (Az egyenlő oldalú tetraéderekről részletes leírás található Reiman I.: *Fejezetek az elemi geometriából* című középiskolai tankönyvében. Ott megtalálható annak bizonyítása is, hogy minden egyenlő oldalú tetraéder valamely téglatestből származik az előzőekben leírt módon.)



1. ábra

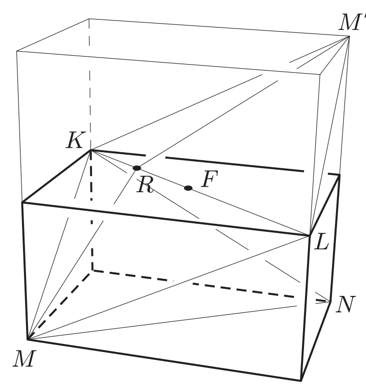
Ha a téglatest egy csúcsában találkozó éleinek hossza a, b és c, akkor a tetraéder minden lapja olyan háromszög, melynek oldalai Pitagorasz tétele szerint $\sqrt{a^2+b^2}$, $\sqrt{b^2+c^2}$ és $\sqrt{a^2+c^2}$. Ebből azonnal adódik, hogy a tetraéder pontosan akkor szabályos, ha a téglatest kocka.

Először belátunk egy téglatestekre vonatkozó egyenlőtlenséget.

Segédtétel. *Legyen KL és MN valamely $\mathcal{T}$ téglatest két szemközti lapján lévő két nem párhuzamos lapátlója. Ekkor a KL szakasz tetszőleges R belső pontja esetén fennáll az*

$$RM + RN < KM + KN$$

egyenlőtlenség.



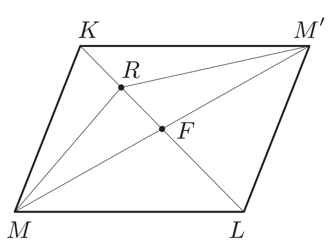
2. ábra

Bizonyítás. Tükrözzük $\mathcal{T}$-t a KL átló F felezőpontjára (*2. ábra*). Az M pont tükörképét jelölje M'. Mivel K tükörképe L, azért KM és LM' párhuzamosak és egyenlők. Tehát a $KMLM'$ négyszög parallelogramma. Ezért $KM' = ML = KN$ és $LM' = KM = LN$, vagyis a KLM' és KLN háromszögek egybevágóak. Ez azt jelenti, hogy $RM' = RN$, ezért elegendő belátnunk az

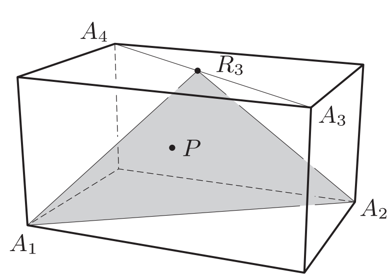
$$RM + RM' < KM + KN = KM + KM' \tag{1}$$

egyenlőtlenséget.

A szimmetria miatt feltehetjük, hogy a $KMLM'$ parallelogrammában R a KMM' háromszög pontja. Ha az R pont egybeesik F-fel, akkor (1) a háromszög-egyenlőtlenség miatt teljesül. Ha pedig R a KMM' háromszög belső pontja (*3. ábra*), akkor a **B. 4325.** feladat a) részének eredményét alkalmazva erre a háromszögre kapjuk (1)-et.



3. ábra



4. ábra

Térjünk vissza az eredeti feladatra. Legyen az $A_1A_2A_3A_4$ egyenlő oldalú tetraéder éleinek hosszai $A_1A_2 = A_3A_4 = e$, $A_1A_3 = A_2A_4 = f$ és $A_1A_4 = A_2A_3 = g$. A tetraéder tetszőleges P belső pontjára az 1, 2, 3 számok bármely i, j, k sorrendje esetén legyen az A_iA_jP sík és az A_4A_k él döféspontja R_k.

Mivel P az $A_iA_jR_k$ háromszög belső pontja (*4. ábra*), ismét a **B. 4325.** feladat *a*) részének értelmében $PA_i+PA_j < R_kA_i + R_kA_j$. Viszont segédtételünk szerint $R_kA_i + R_kA_j < A_4A_i + A_4A_j$, tehát

$$PA_i + PA_j < A_4A_i + A_4A_j.$$

Ezt az egyenlőtlenséget mindhárom i, j pár esetén felírva, majd összeadva az egyenlőtlenségeket, kapjuk, hogy

$$2(PA_1 + PA_2 + PA_3) < 2(A_4A_1 + A_4A_2 + A_4A_3) = 2(e + f + g).$$

Vagyis

$$PA_1 + PA_2 + PA_3 < e + f + g,$$

amiből szimmetria okokból már látszik, hogy a tetraéderre teljesül a feladat szövegében megfogalmazott feltételrendszer.

Megjegyzés. A feladatban szereplő egyenlőtlenség más tetraéderekben is fennáll. A megoldók többsége egy-egy konkrét tetraéderben mutatta meg, hosszadalmas számolással, hogy teljesül az egyenlőtlenség. Legtöbben olyan szabályos háromszög alapú egyenes gúlák esetét számolták ki, melyek oldalélének hossza nem sokkal tér el az alapélétől.