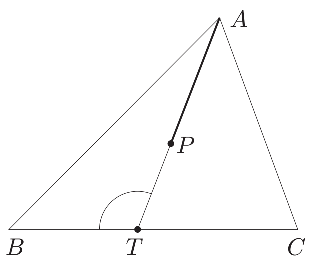
Az állítás igaz. Ennek bizonyításához először két segédtételt látunk be.

1. *Bármely ABC háromszög tetszőleges P belső pontja esetén fennáll az*

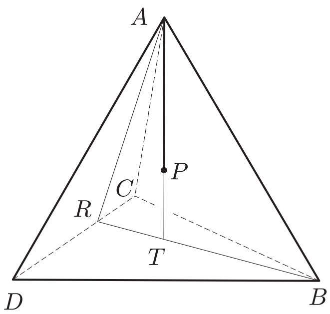
$$AP < \max\{AB, AC\}$$

egyenlőtlenség. Azaz a háromszög belső pontját valamely csúccsal összekötő szakasz rövidebb, mint a háromszög adott csúcsból induló hosszabbik oldala.

Bizonyítás. Legyen az AP és BC egyenesek metszéspontja T (*1. ábra*). Ekkor $AP < AT$, és mivel T a BC szakasz belső pontja, azért az ATC és ATB szögek összege 180°, tehát a két szög közül legalább az egyik legalább 90°. Ekkor viszont az ATC vagy a BTC háromszögben ez a szög a legnagyobb. Mivel bármely háromszögben nagyobb szöggel szemben nagyobb oldal van, ez azt jelenti, hogy AB és AC szakaszok közül valamelyik biztosan nagyobb, mint AT.



1. ábra



2. ábra

2. *Bármely $ABCD$ tetraéder tetszőleges P belső pontja esetén fennáll az*

$$AP < \max\{AB, AC, AD\}$$

egyenlőtlenség. Azaz a tetraéder belső pontját valamely csúccsal összekötő szakasz rövidebb, mint a tetraéder adott csúcsból induló leghosszabb éle.

Bizonyítás. Legyen az AP egyenes és a BCD sík döféspontja T. Ekkor $AP < AT$ és T a BCD háromszög belső pontja. Ezért a BT egyenes is valamely R belső pontban metszi a tetraéder CD élét (*2. ábra*). Az 1. állítást először az ABR, majd pedig az ACD háromszögre alkalmazva kapjuk, hogy

$$AT < \max\{AB, AR\} < \max\big\{AB, \max\{AC, AD\}\big\} = \max\{AB, AC, AD\},$$

ami éppen a bizonyítandó állítás.

Eredeti feladatunk a 2. állítást felhasználva már könnyen megoldható. Jelölje a az $ABCD$ szabályos tetraéder élhosszát. Ekkor tetszőleges P belső pont esetén $AP < \max\{AB, AC, AD\} = a$, és ugyanígy kapjuk azt is, hogy $BP < a$ és $CP < a$. Vagyis

$$PA + PB + PC < 3a = DA + DB + DC,$$

ami éppen a bizonyítandó egyenlőtlenség.

Megjegyzés. A konvex halmazok tulajdonságait felhasználva a 2. állítást egyszerűbben is bizonyíthatjuk: Rajzoljuk meg az A középpontú $r = \max\{AB, AC, AD\}$ sugarú $\mathcal{G}$ gömböt. A tetraéder másik három csúcsa vagy $\mathcal{G}$ felületére illeszkedik, vagy pedig a belsejében van. Tehát a gömbtest, mely egy konvex alakzat, tartalmazza a csúcsok konvex burkát is, ami a teljes tetraéder. Ezért a tetraéder minden belső pontja egyúttal a gömbnek is belső pontja. Vagyis $AP < r$.