Megoldás. Az a, b, c számok (módosított) kanonikus alakja:

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}, \quad b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_r^{\beta_r}, \quad c = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \dots p_r^{\gamma_r}.$$

A módosított kanonikus alakon azt értjük, hogy mindhárom szám ugyanazokat a prímeket tartalmazza úgy, hogy amelyik ténylegesen nem szerepelne a felbontásban, azt 0 kitevővel vesszük be a szorzatba. Ezzel elérjük, hogy a számok egységesen kezelhetők. Jelöljük a p_i prímhez tartozó kitevők közül a legkisebbet $\min(i)$-vel, a középsőt $\operatorname{med}(i)$-vel, a legnagyobbat pedig $\max(i)$-vel. Világos, hogy $\min(i) \le \operatorname{med}(i) \le \max(i)$. Ismert, hogy a legnagyobb közös osztóban mindegyik prím az előforduló legkisebb kitevőn, míg a legkisebb közös többszörösben az előforduló legnagyobb kitevőn szerepel. (Természetesen ebben az egységes jelölésben.)

A páronkénti legnagyobb közös osztó meghatározásakor tetszőleges p_i prím esetében megmarad a legkisebb kitevő kétszer és a középső egyszer. Ha ennek a háromnak vesszük a maximumát, akkor éppen $\operatorname{med}(i)$-t kapjuk.

Vegyük most páronként a legkisebb közös többszörös kitevőit a p_i prím esetében. Itt a legnagyobb marad meg kétszer és a középső egyszer. Ha vesszük a három pár legnagyobb közös osztóját, akkor ott e három közül a legkisebbet kell vennünk, vagyis a középsőt $\operatorname{med}(i)$-t. Az elmondottak tetszőleges p_i hatványaira igazak, vagyis

$$\big[(a,b),(b,c),(c,a)\big] = \big([a,b],[b,c],[c,a]\big)$$

valóban teljesül.