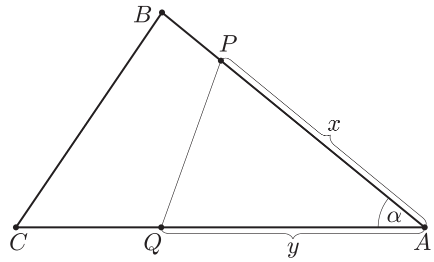
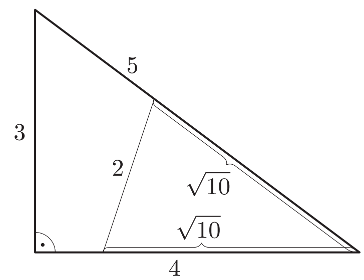
Megoldás. Először általában adunk alsó becslést egy háromszög területét felező szakasz hosszára. Ha a PQ szakasz felezi az ABC háromszög területét, akkor az eredeti háromszög két része közül legalább az egyik egy háromszög (akkor lesz mindkét rész háromszög, ha a PQ szakasz tartalmazza az ABC háromszög valamelyik csúcsát). Mivel alsó becslést adunk, feltehetjük, hogy P és Q az ABC háromszög két oldalára esik, az oldalak szimmetrikus szerepe miatt pedig azt is, hogy P az AB, Q pedig az AC szakasz A-tól különböző pontja. Legyen $AP = x$ és $AQ = y$ (*1. ábra*).



1. ábra



2. ábra

Ha az ABC háromszög területét T, az A csúcsánál lévő szöget pedig α jelöli, akkor az APQ háromszög területe

$$\frac{T}{2} = \frac{AP \cdot AQ \cdot \sin\alpha}{2} = \frac{xy\sin\alpha}{2}.$$

Az ebből adódó $xy = \dfrac{T}{\sin\alpha}$ összefüggést, valamint a koszinusztételt és a négyzetes és a mértani közepek közti egyenlőtlenséget felhasználva kapjuk, hogy

$$PQ^2 = x^2 + y^2 - 2\,xy\cos\alpha \geq 2\,xy(1-\cos\alpha) = 2\,T\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}. \tag{1}$$

Mivel $1-\cos\alpha = 2\,\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$ és $\sin\alpha = 2\,\sin\dfrac{\alpha}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2}$, azért

$$PQ^2 \geq 2\,T\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = 2\,T\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2},$$

ahol egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $x = y = \sqrt{AB\cdot\dfrac{AC}{2}}$.

Térjünk vissza az eredeti feladatunkra. Hegyesszögek esetén a tangens függvény szigorúan monoton nő, ezért a legrövidebb területfelező szakaszt akkor kapjuk, ha a 3, 4 és 5 oldalakkal rendelkező háromszög legkisebb szögét közrefogó két oldalon, azaz a 4 és 5 hosszú oldalakon vesszük fel a P és Q pontokat úgy, hogy $AP = AQ = \sqrt{5\cdot\dfrac{4}{2}} = \sqrt{10}$ teljesüljön. Ez $\sqrt{10} < 4$ miatt megtehető (*2. ábra*). Ekkor $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$, ezért az (1) egyenlőségből kapjuk, hogy

$$PQ^2 = 10 + 10 - 20\cdot\frac{4}{5} = 4.$$

Tehát a háromszög területét felező szakaszok közül a legrövidebbnek a hossza 2.